4.4 Freies Teilchen in der Quantenmechanik

Klassische Mechanik: Freies Teilchen in 1D $\Leftrightarrow \; F = -\dfrac{dV(x)}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow V(x) = \text{const}$

Wahl: $V(x) = 0$

$\Rightarrow$ Teilchen in Ruhe oder
in gleichförmiger Bewegung $\Rightarrow \; p_x = \text{const} \Rightarrow E = \text{const}$

Quantenmechanik:

SGL: $\quad -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \quad \Leftrightarrow \dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$

Wie Teilchen im Kasteninneren

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung: $\quad \psi(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{-i\alpha x} \quad$ mit $\alpha = \dfrac{(2mE)^{1/2}}{\hbar}$

Wellenfunktion eines freien Teilchens

Andere Randbedingungen $\Rightarrow$ andere spezielle Lösungen: $\Rightarrow E \geq 0;\ E \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Keine Energiequantisierung

Wahl: B = 0 und Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion:

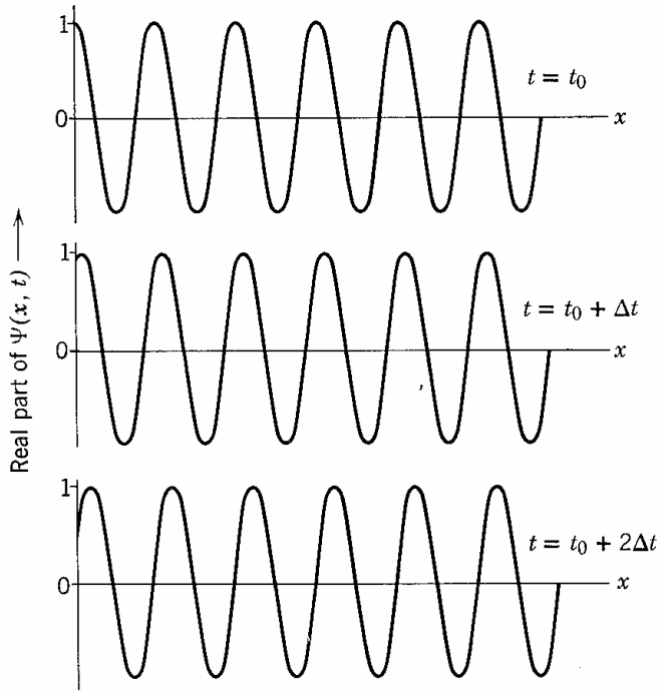
$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} =$$

$$= A\left[\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)\right]$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{Wellenvektor}$$

$$\omega = 2\pi\nu = \text{Kreisfrequenz}$$

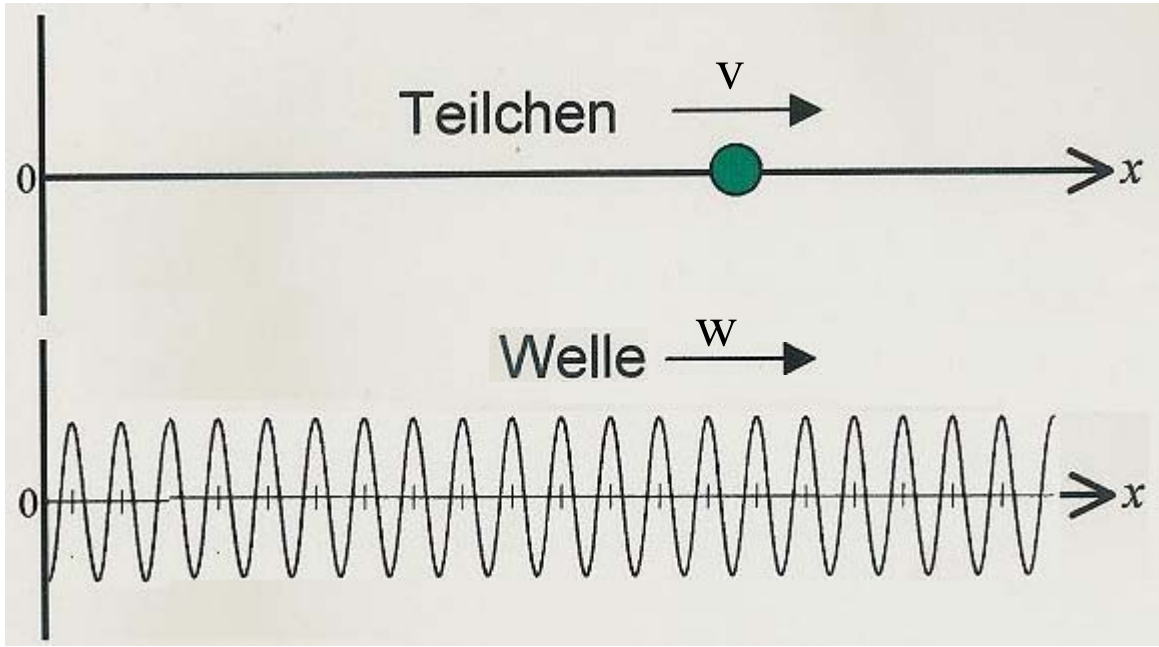
Nullstellen des Realteils für: $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} + \frac{\omega}{k}t$



Realteil cos(kx-ωt) einer komplex exponentiellen propagierenden Wellenfunktion $\Psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ für ein freies Teilchen.
Mit zunehmender Zeit t wandern die Nullstellen in Richtung +x

Eigenschaften von Materiewellen

i) Einzelwelle – Zwei Paradoxien



a) Paradoxie der Teilchenlokalisation – wo ist der Ort der Materiewelle?

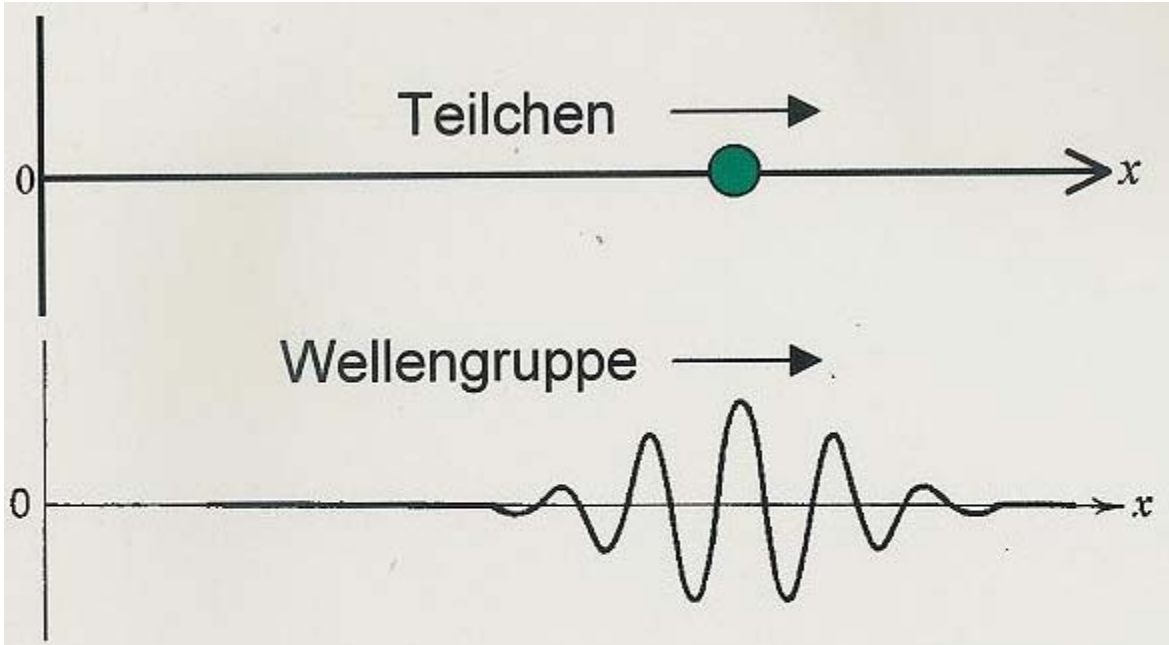
b) Paradoxie der Wellengeschwindigkeit w

$$w = \frac{v}{2}$$

v = Teilchengeschwindigkeit

Eigenschaften von Materiewellen

Lösung: Beschreibung eines Teilchens als Wellengruppe



Erzeugung einer Wellengruppe durch Superposition von Einzelwellen unterschiedlicher Wellenlänge

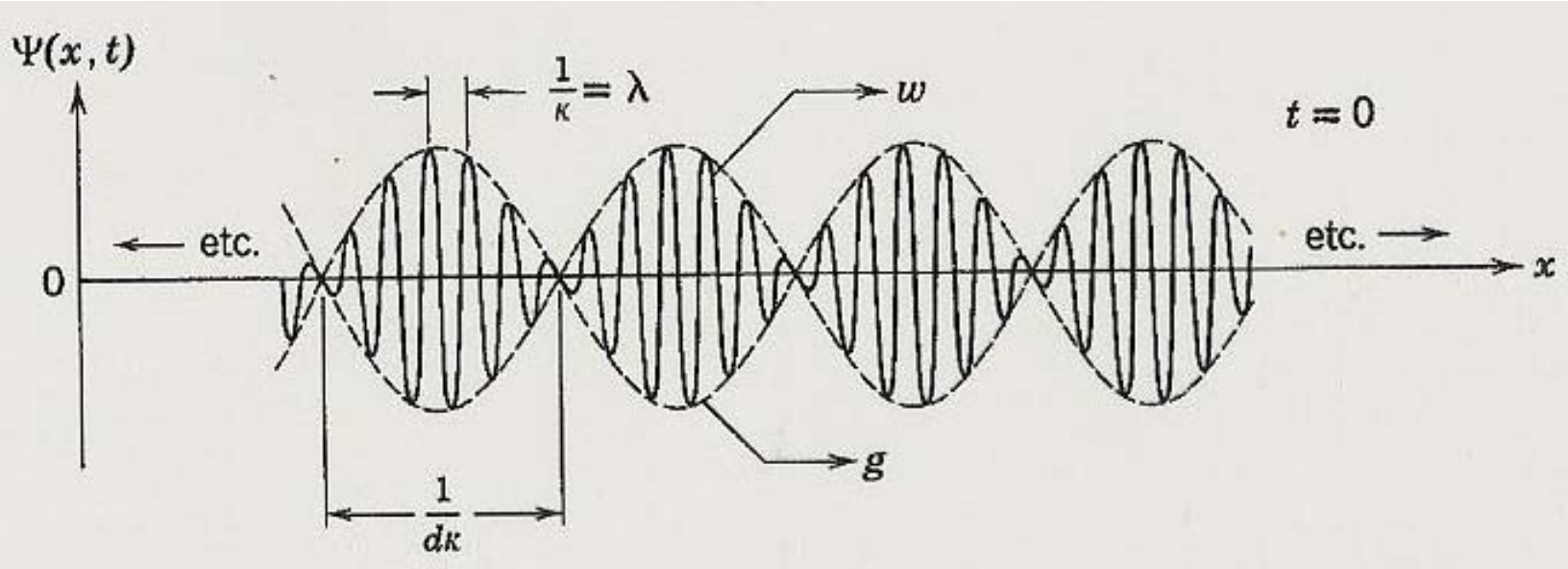
Eigenschaften von Materiewellen

ii) Superposition zweier Wellen mit $\lambda_1 \approx \lambda_2 \rightarrow$ Schwebung

Linearität von $\hat{H}$: $\psi_1(x,t), \psi_2(x,t)$ = Lösungen der SGL

$$\Psi(x,t) = c_1\psi_1(x,t) + c_2\psi_2(x,t)$$

auch Lösung der SGL



Eigenschaften von Materiewellen

iii) Superposition von 7 Wellen mit k=9 $\rightarrow$ k=15

$$\Psi(x,t) = \sum_{i=1}^{7} c_i \psi_i(x,t)$$

$\Rightarrow$ Zentrale Wellengruppe + periodisch wiederkehrende Zusatzgruppe

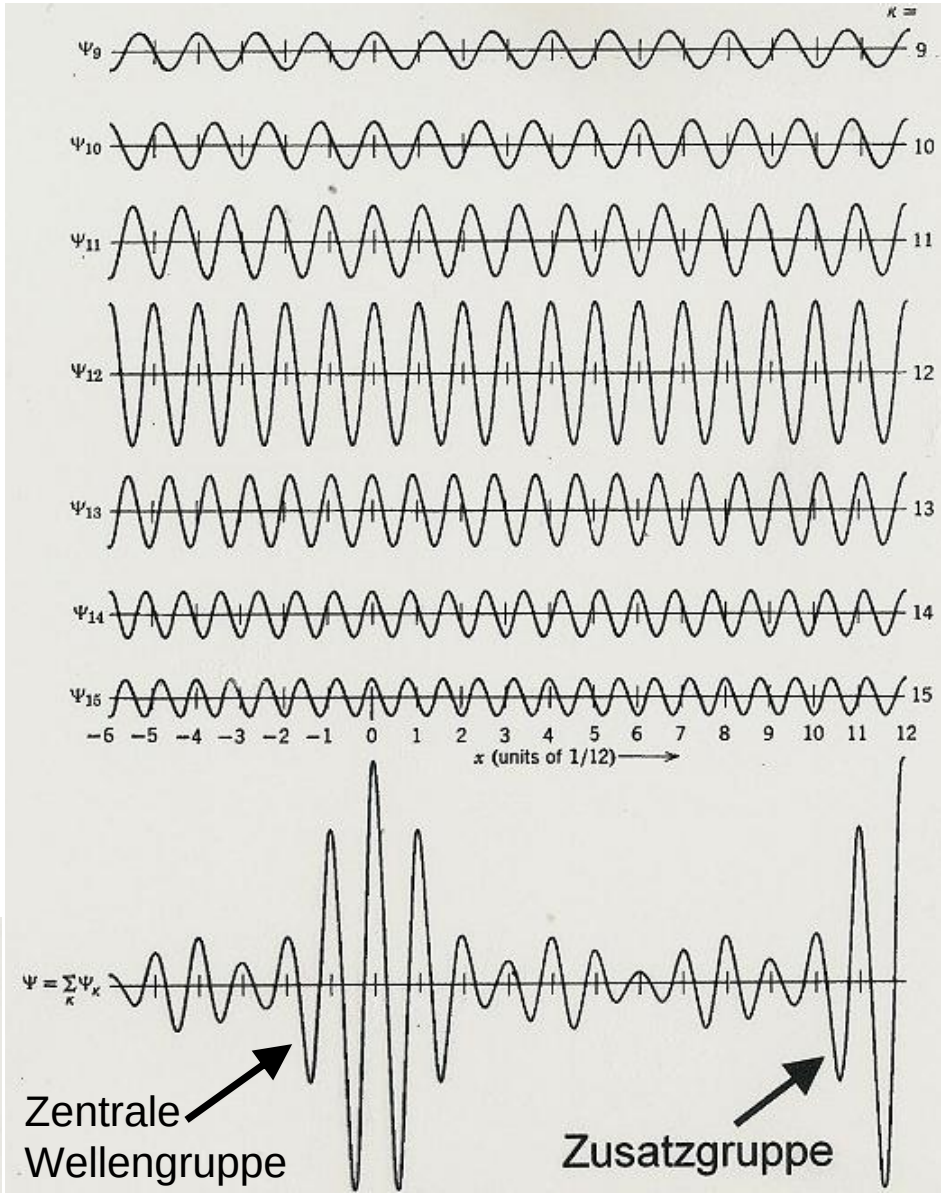


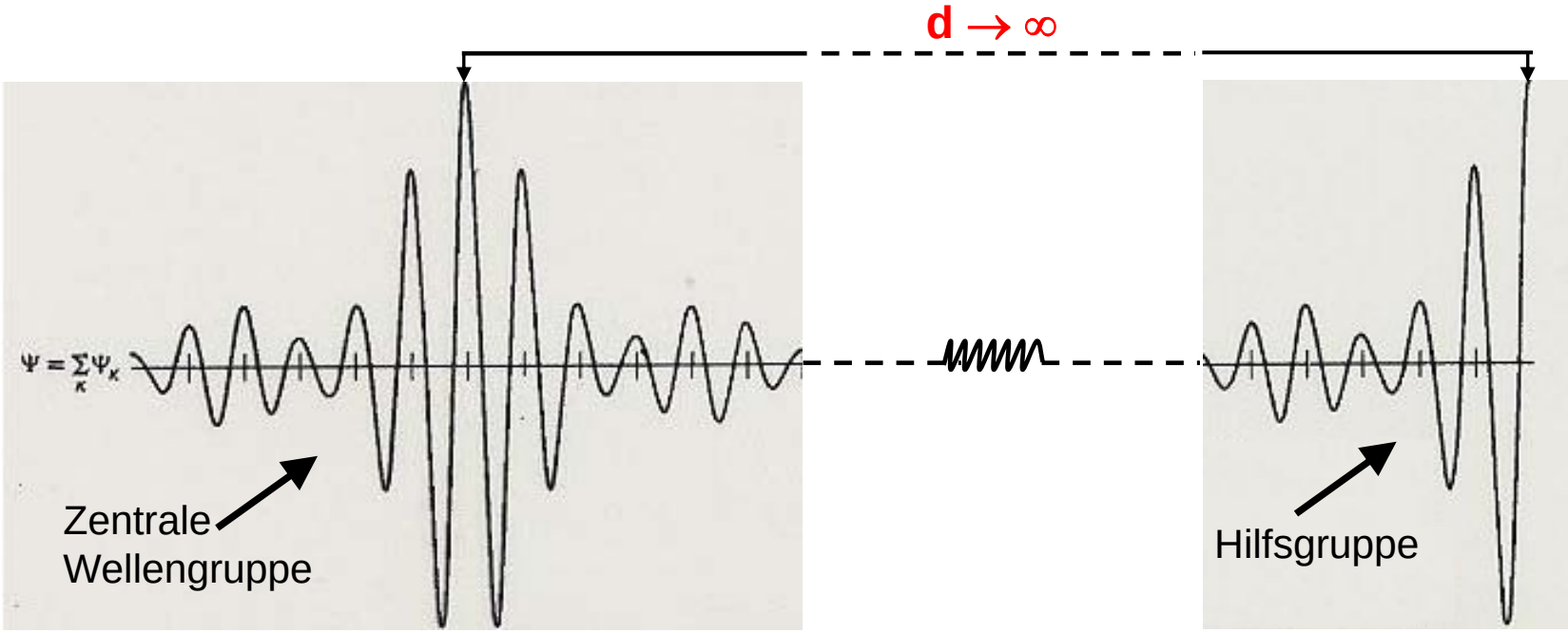
Figure 3-9 Showing, at $t = 0$, the superposition of seven cosine waves $\Psi_\kappa = A_\kappa \cos 2\pi(\kappa x - \nu t)$ with uniformly spaced reciprocal wavelengths drawn from the range $\kappa = 9$ to $\kappa = 15$. Their amplitudes A_κ maximize at the value $A_{12} = 1$ for the wave whose κ lies in the center of the range, and they decrease symmetrically through the values 1/2, 1/3, and 1/4 for the other waves as their κ approach the ends of the range. The sum $\Psi = \sum_\kappa \Psi_\kappa$ of these waves consists of a group centered on $x = 0$, plus repeating groups of the same shape periodically spaced along the x axis in both directions from $x = 0$. With Δx defined as the maximum amplitude to half-maximum amplitude width of Ψ, and $\Delta\kappa$ defined as the range of reciprocal wavelengths of the components of Ψ from maximum amplitude to half-maximum amplitude, we have $\Delta x \simeq 1/12$, $\Delta\kappa \simeq 1$, and $\Delta x \Delta\kappa \simeq 1/12$.

Eigenschaften von Materiewellen

iv) Superposition von n $\to\infty$ vielen Wellen mit k=9 bis k=15

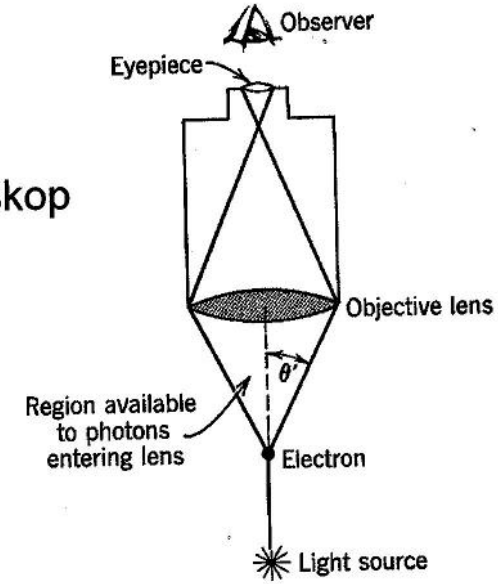
$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x,t)$$

$\Rightarrow$ Zentrale Wellengruppe + Hilfsgruppe im Abstand $d \to \infty$

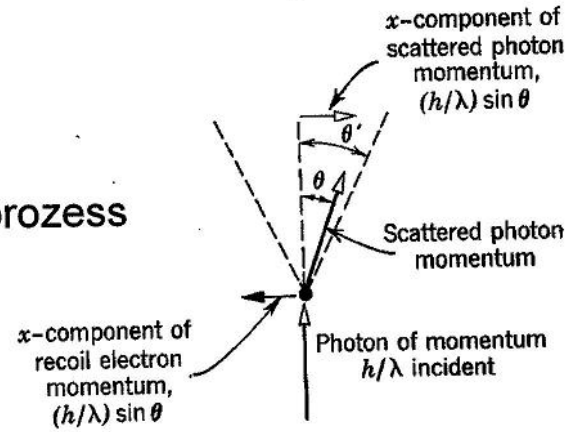


Heisenbergsches Unschärfeprinzip: Bohrs Gedankenexperiment

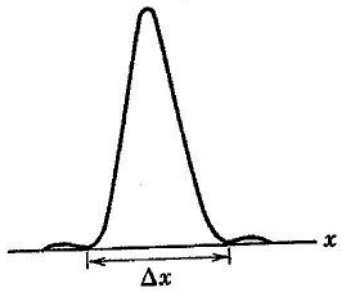
Mikroskop

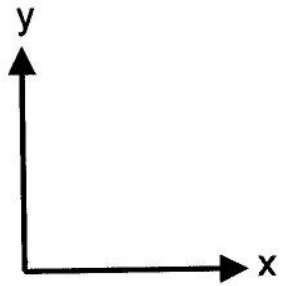


Messprozess



Messergebnis:
Beugungsbild des e⁻





$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin\theta'}$$

$$\Delta p_x = 2p\sin\theta' = \frac{2h}{\lambda}\sin\theta'$$

$$\Delta x \Delta p = 2h$$

Welle-Teilchen-Dualismus – Borns Interpretation von Materiewellen

Einstein: Photonen - $I = h\nu \bar{N}_{Ph} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \left|\vec{E}^2\right| = I$ (Elektrom.) Leitwelle

Average photon density (per m²s)

$$\vec{E}(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

Born: Partikel - $\bar{N} \Leftrightarrow \left|\Psi\right|^2 = I$ (Materie-) Leitwelle

Average particle density (per m²s)

$$\Psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

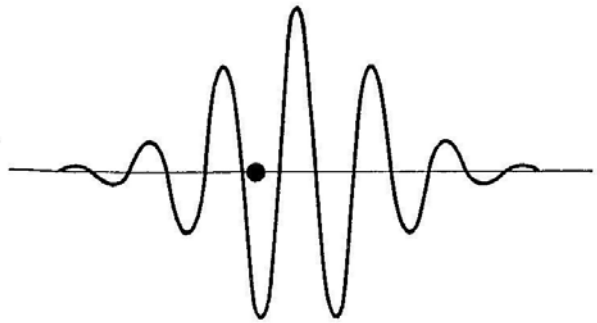
Born: „According to this view, the whole course of events is determined by the laws of probability; to a state in space there corresponds a definite probability, which is given by the de Broglie wave associated with the state. A mechanical process is therefore accompanied by a wave process, the guiding wave, describes by Schroedinger‘s equation, the significance of which is that it gives the probability of a definite course of the mechanical process. If, for example, the amplitude of the guiding process is zero at a certain point in space, this means that the probability of finding the electron at this point is vanishingly small.“

Bornsches Postulat: Interpretation von $|\Psi(x,t)|^2$

Born: „Wenn zu einem Zeitpunkt t eine Messung durchgeführt wird, um das Teilchen, welches mit der Wellenfunktion Ψ(x,t) assoziiert ist, zu lokalisieren, dann ist die Wahrscheinlichkeit P(x,t), dass das Teilchen an einer Koordinate zwischen x und x+dx gefunden wird, gegeben durch $\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$.“

$P(x,t)dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = |\Psi(x,t)|^2 dx$ = Wahrscheinlichkeit

$P(x,t)$ = Wahrscheinlichkeitsdichte



Schematische Darstellung einer Wellenfunktion und des assoziierten Teilchens. Das Teilchen muss sich an einem Ort befinden, an dem die Wellenfunktion eine signifikante Amplitude hat.

Vorhersagbarkeit quantenmechanischer Systeme

Born: „Wir beschreiben den momentanen Zustand eines Systems durch eine Größe Ψ, welche eine Differentialgleichung erfüllt und deren zeitliche Veränderung daher durch ihre Form zum Zeitpunkt t = 0 vollständig bestimmt ist, so dass das Verhalten des Systems streng kausal ist. Da aber eine physikalische Relevanz nur der Größe $\Psi^*\Psi$ sowie anderen ähnlich aufgebauten quadratischen Größen zukommt, welche Ψ nur teilweise definieren, folgt, dass der Anfangswert der Ψ-Funktion zwangsläufig nicht vollständig definierbar ist, selbst wenn die physikalisch bestimmbaren Größen zum Zeitpunkt t=0 vollständig bekannt sind. Diese Sicht der Dinge ist gleichbedeutend mit der Behauptung, dass Ereignisse in der Tat streng kausal geschehen, dass wir aber den Ausgangszustand nicht exakt kennen. In diesem Sinne ist das Kausalitätsgesetz leer; die Physik ist von Natur aus unbestimmt und somit eine Sache der Statistik."

„Die Bewegung von Teilchen gehorcht den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit, aber die Wahrscheinlichkeit selbst verändert sich in Übereinstimmung mit dem Gesetz der Kausalität."