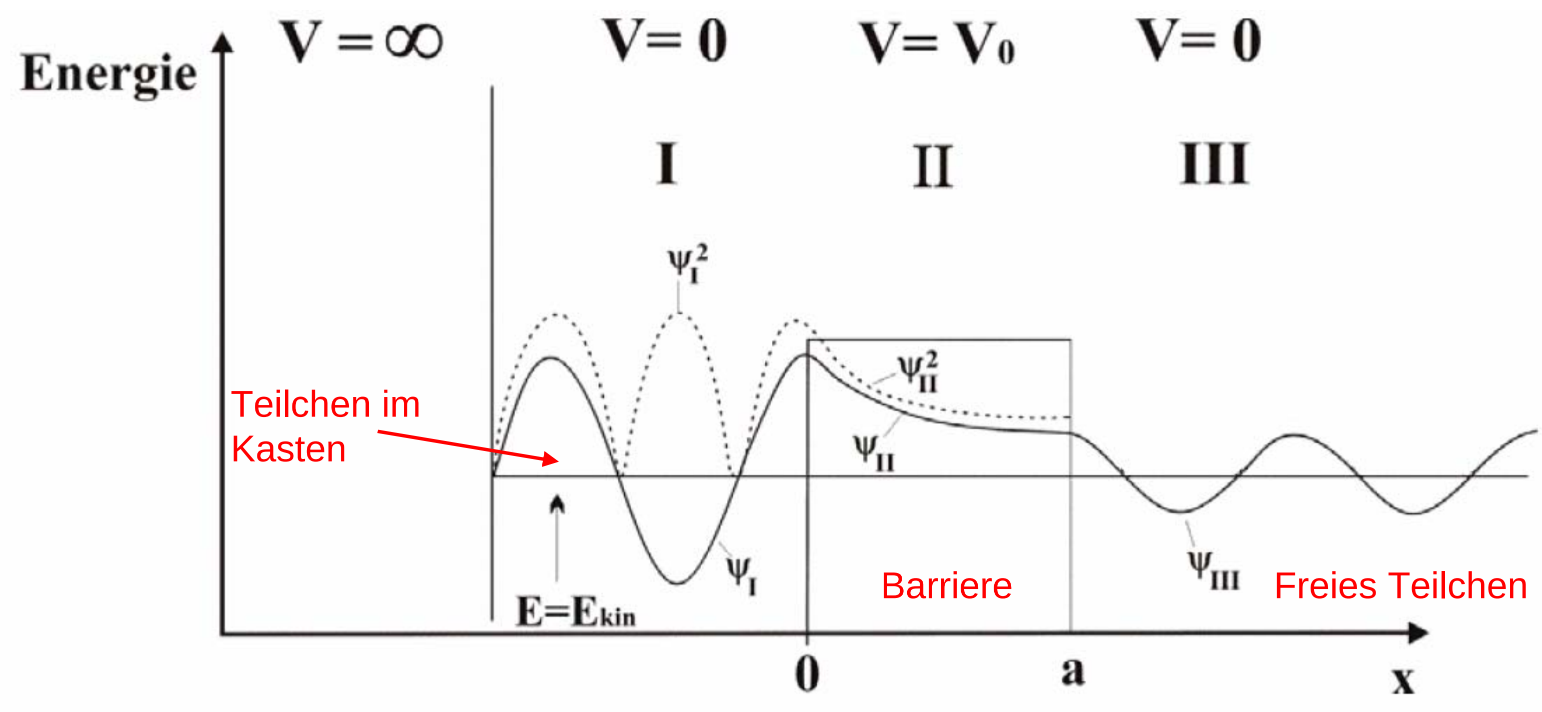
Tunneleffekt

Definition: Überwinden einer Barriere, obwohl die Barrierenhöhe V_0 größer ist als die kinetische Energie des Teilchens, d.h. $V_0 > E = E_{kin}$

Tunneleffekt = rein quantenmechanischer Effekt

Zwei Ansätze: 1. Gräber-Skript



Entrinnen eines Teilchens aus einem Potentialtopf mit endlich hoher Wand

Anmerkung zur Darstellung von ψ^2

Keine Darstellung von ψ_{III}^2

1. Darstellung über oszillierende Funktion wie für ψ_{I}^2 wäre falsch, da es sich in Region III nicht um eine stehende Welle, sondern um eine propagierende Welle handelt, die sich in +x-Richtung bewegt. Diese wird beschrieben über

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \cdot e^{-iEt/\hbar} = Ae^{ikx} \cdot e^{-iEt/\hbar}$$

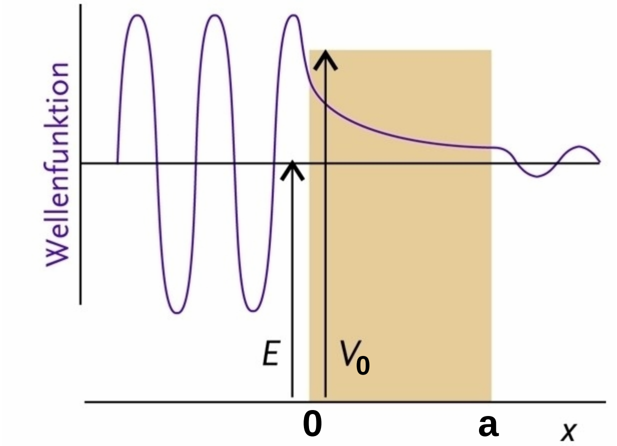
Das Quadrat der Wellenfunktion, die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte, ist dann aber eine Konstante

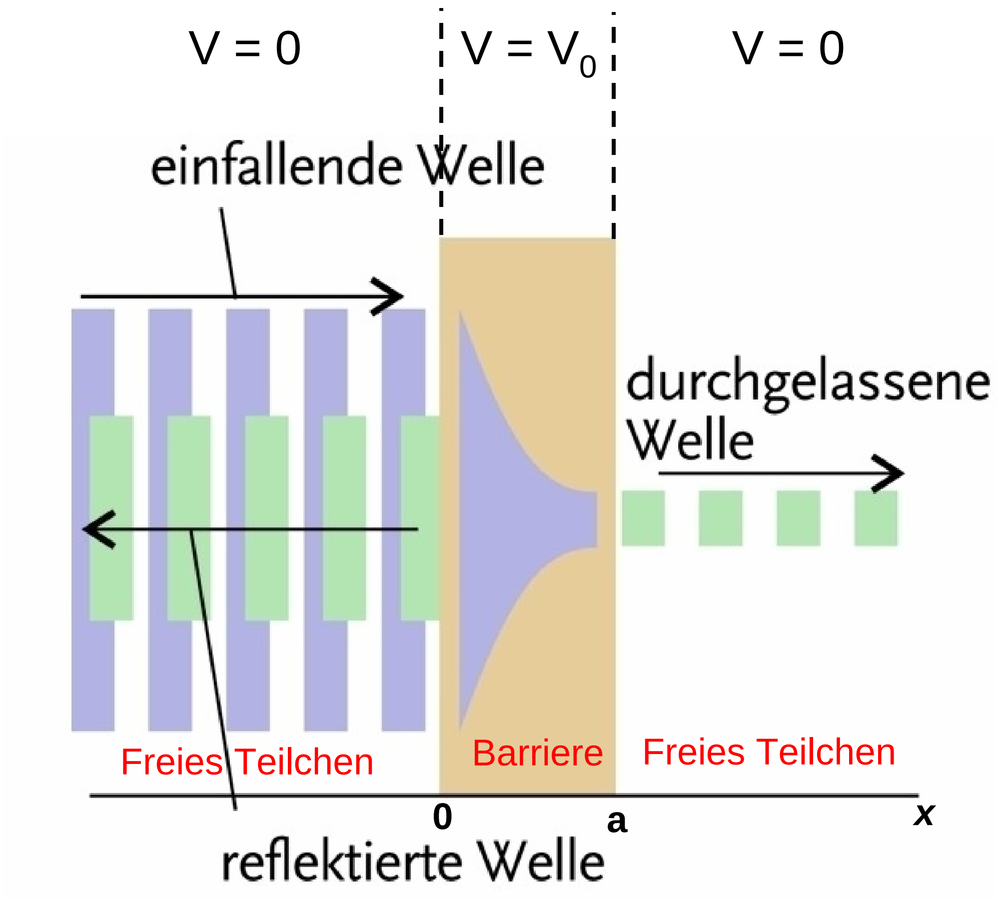
$$\Psi^*\Psi = A^* e^{-ikx} \cdot e^{+iEt/\hbar} A e^{ikx} \cdot e^{-iEt/\hbar} = |A|^2$$

2. Dieses Resultat beschreibt aber die tatsächliche Situation auch nicht korrekt. Ein freies Teilchen ist eine Idealisierung, welche in der Realität nicht vorkommt. Ein Teilchen wird immer irgendein Potential spüren, was dann zu einer teilweisen Lokalisation führt. Die transmittierte Welle müsste daher korrekterweise als ein Wellenpacket (d.h. eine Wellengruppe) beschrieben werden, die sich in +x-Richtung bewegt. Da die damit verbundene Mathematik zu aufwendig ist, wird im Sinne einer didaktischen Reduktion auf die Darstellung als „freies Teilchen“ zurückgegriffen.

Tunneleffekt

Zwei Ansätze: 2. Atkins





Überwindung einer endlich hohen Potentialbarriere ($\rightarrow$ Transmission)

Beide Probleme führen zur selben Lösung der SGL

Teilchen an endlicher Barriere – Lösung der SGL

Allgemeine Lösung:

$$\Psi_I = Ae^{ik_I x} + Be^{-ik_I x}$$

$$\Psi_{II} = Ce^{k_{II} x} + De^{-k_{II} x}$$

$$\Psi_{III} = A'e^{ik_I x} + B'e^{-ik_I x}$$

$Ae^{ik_I x} \triangleq$ einfallende Welle

$Be^{-ik_I x} \triangleq$ reflektierte Welle

$A'e^{ik_I x} \triangleq$ transmittierte Welle

Randbedingungen: Stetigkeit von Ψ und $d\Psi / dx$ $\rightarrow$ Spezielle Lösung

$$\Psi_I(x=0) = \Psi_{II}(x=0) \quad \Rightarrow \quad A + B = C + D$$

$$\Psi_{II}(x=a) = \Psi_{III}(x=a) \quad \Rightarrow \quad Ce^{k_{II}a} + De^{-k_{II}a} = A'e^{k_I a} + B'e^{-k_I a}$$

$$\left(\frac{d\Psi_I}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\Psi_{II}}{dx}\right)_{x=0} \quad \Rightarrow \quad ik_I A - ik_I B = k_{II} C - k_{II} D$$

$$\left(\frac{d\Psi_{II}}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{d\Psi_{III}}{dx}\right)_{x=a} \quad \Rightarrow \quad k_{II} Ce^{k_{II}a} - k_{II} De^{-k_{II}a} = ik_I A'e^{k_I a} - ik_I B'e^{-k_I a}$$

$B' = 0$ Keine zurücklaufende Welle in Region III

Tunnelwahrscheinlichkeit T (=Transmissionswahrscheinlichkeit)

Im Folgenden betrachten wir nur die Transmissionswahrscheinlichkeit durch die Barriere. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen im Bereich I nach rechts bewegt, ist.

$$W(\text{Bereich I, rechts}) : |A|^2 \tag{7.63}$$

Im Bereich III gilt entsprechend

$$W(\text{Bereich III, rechts}) : |A'|^2 \tag{7.64}$$

Die Transmissionswahrscheinlichkeit ist daher

$$T = \frac{|A'|^2}{|A|^2} \tag{7.65}$$

Setzt man die Koeffizienten ein, ergibt sich:

$$T = \frac{1 - \frac{E}{V_0}}{\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) + \frac{V_0}{4E} \sinh^2(k_{II} a)} \tag{7.66}$$

Darin ist $k_{II} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\,(V_0 - E)}$ und a ist die Dicke der Barriere.

Für $k_{II}a \gg 1$ lässt sich Gleichung 7.66 vereinfachen. Mit $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \approx \frac{1}{2}e^{x}$ erhalten wir:

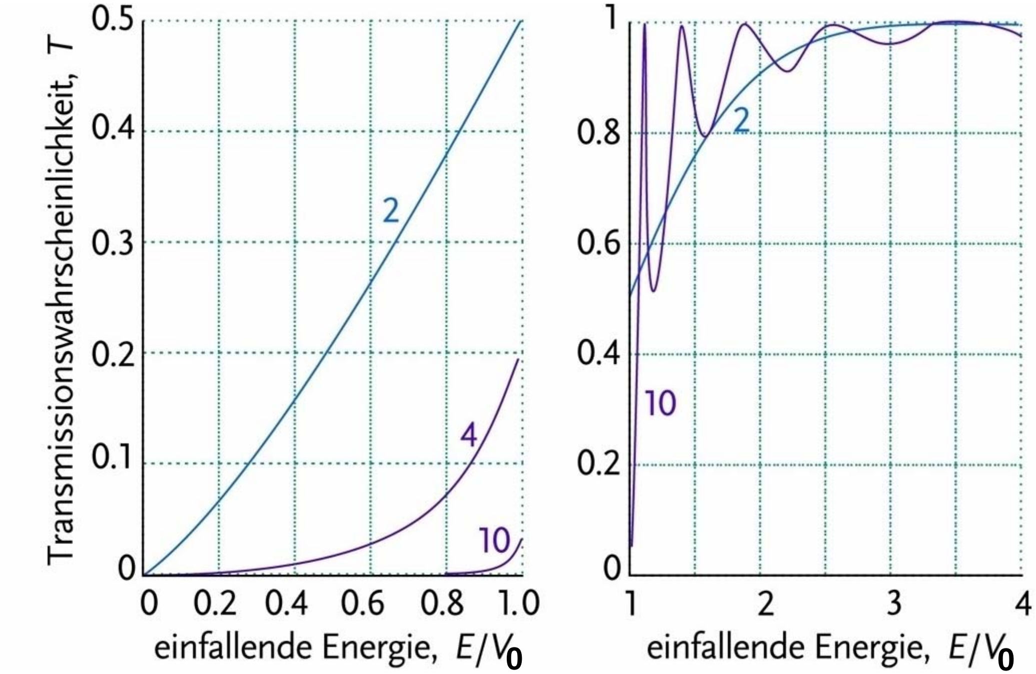
$$T = \frac{16E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)\exp(-2k_{II}a) \qquad (7.67)$$

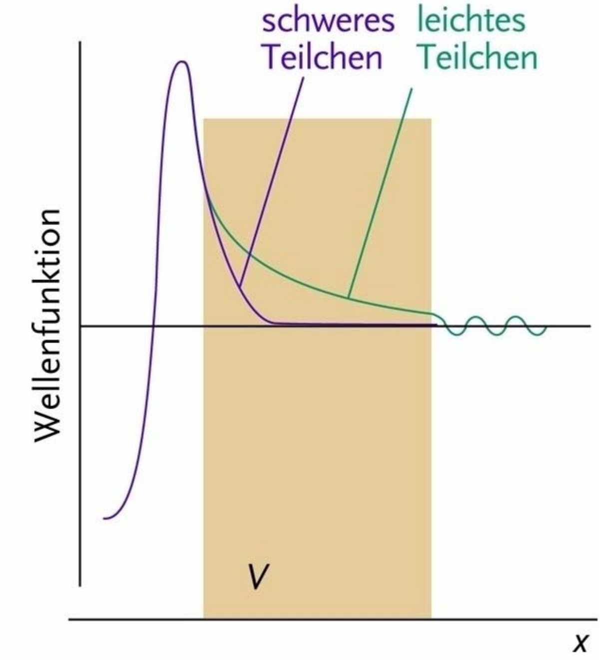
Diese Gleichung sagt aus, dass sich die Transmissionswahrscheinlichkeit wie folgt verhält:

1. T nimmt exponentiell ab mit a (Dicke der Barriere)
2. T nimmt exponentiell ab mit $V_0^{1/2}$ (Höhe der Barriere)
3. T nimmt exponentiell ab mit $m^{1/2}$ (Masse des Teilchens)

Abhängigkeiten der Tunnelwahrscheinlichkeit

Tunnelwahrscheinlichkeit durch eine Barriere. Horizontale Achse: Energie Des auftreffenden Teilchens als Vielfaches der Barrierenhöhe; Werte an den Kurven = $a(2mV_0)^{1/2}/\hbar$**.**
Links: $E < V_0$; Rechts: $E > V_0$.
Für $E < V_0$ ist $T > 0$, obwohl klassisch $T = 0$ wäre. Dafür ist $T < 1$ für $E > V_0$, wo klassisch $T = 1$ wäre.





Die Wellenfunktion eines schweren Teilchens klingt in einer Barriere schneller ab als die eines leichten Teilchens. Daher hat ein leichteres Teilchen eine höhere Tunnelwahrscheinlichkeit.

Berechnung einer Tunnelwahrscheinlichkeit

Wir betrachten ein Elektron, das die kinetische Energie 1 eV hat und durch eine Barriere der Dicke **0,5nm** tunnelt. Wir verwenden Gleichung 7.67 mit den folgenden Daten:

$$E = 1\,\text{eV}$$
$$V_0 = 5\,\text{eV}$$

$$m = m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,\text{kg}$$
$$a = 0{,}5\,\text{nm}$$

$$T = \frac{16\cdot 1\,\text{eV}}{5\,\text{eV}}\left(1-\frac{1\,\text{eV}}{5\,\text{eV}}\right)\exp\left(-\frac{2\cdot 0{,}5\cdot 10^{-9}\,\text{m}}{1{,}05\cdot 10^{-34}\,\text{Js}}\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,\text{kg}\,(5-1)\,\text{eV}}\right)$$

Einheiten des Exponenten: $\qquad 1\,\text{eV} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{J}$

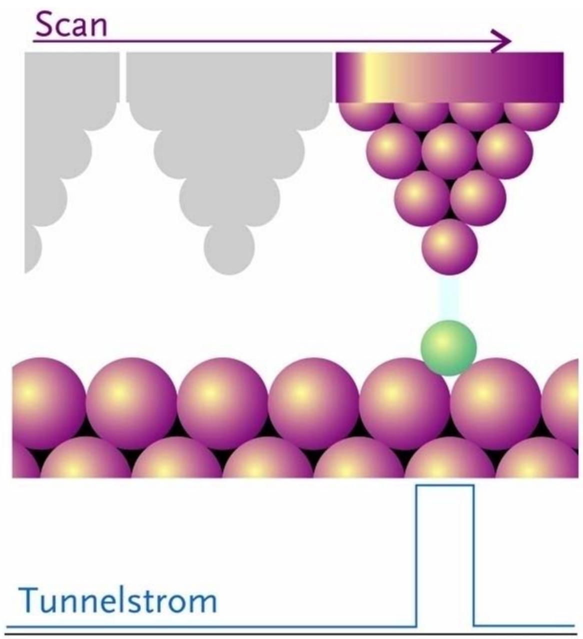
$$\left[\frac{\text{m}}{\text{Js}}(\text{kg eV})^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{m}}{\text{Js}}\left(\text{kg}\times 1{,}6\times 10^{-19}\,\text{J}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{m}}{\text{Js}}\left(\text{kg kg m}^2\text{s}^{-2}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.= \frac{\text{m kg m s}^{-1}}{\text{Js}}\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{m}^2\,\text{kg s}^{-2}}{\text{m}^2\,\text{kg s}^{-2}}\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

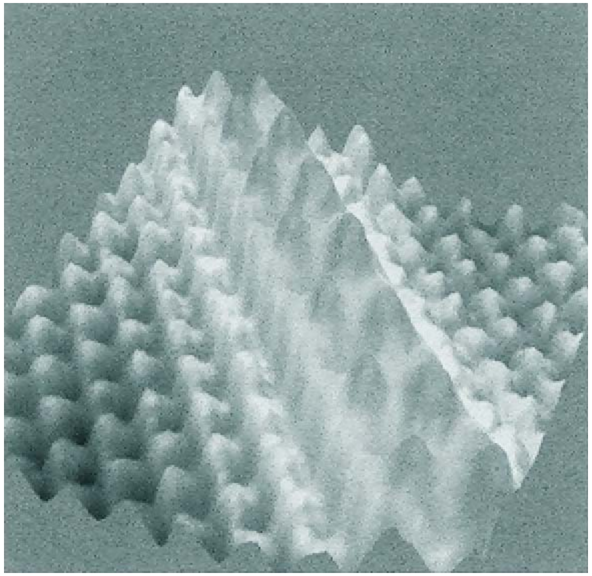
$$T = \frac{16}{5}\left(1-\frac{1}{5}\right)\exp\left(-\frac{2\cdot 0{,}5\cdot 10^{-9}}{1{,}05\cdot 10^{-34}}\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 4\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}\right) = 4{,}4\cdot 10^{-4}$$

Rastertunnelmikroskopie

Auch Scanning tunneling microscopy (STM)

- Abtasten einer elektrisch leitenden Probe mit einer Platin-Iridium-Spitze.
- Hinreichend kleiner Abstand Spitze – Oberfläche $\rightarrow$ Elektronen tunneln durch den Zwischenraum
- Tunnelstrom hängt sehr empfindlich vom Abstand Oberfläche-Spitze ab
- Abbildung der Oberflächentopographie mit atomarer Auflösung





STM-Aufnahme von Cäsiumatomen auf einer Galliumarsenid-Oberfläche