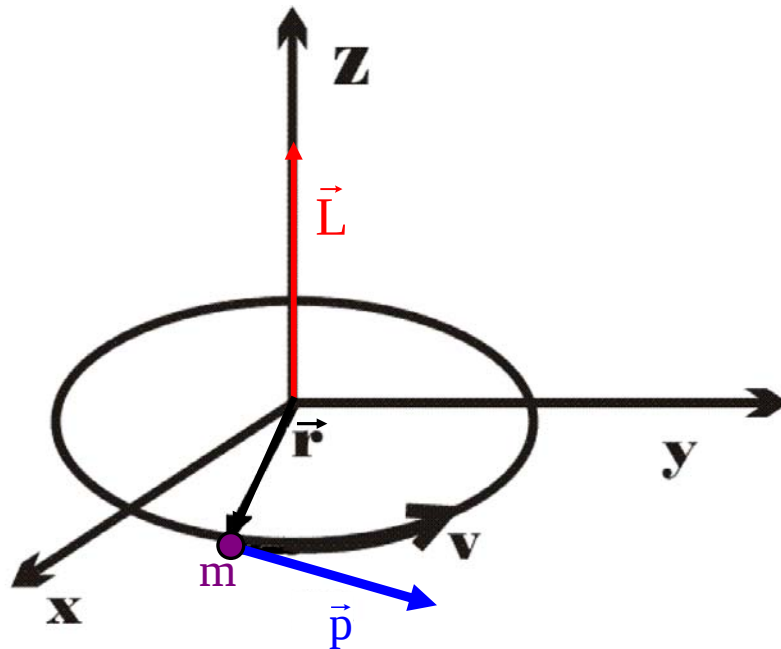
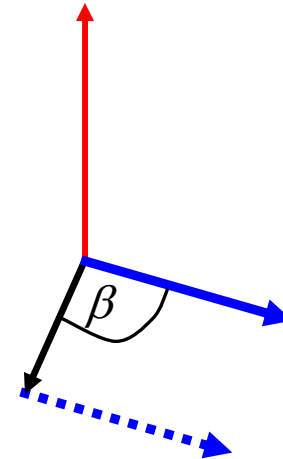


Drehimpuls – Allgemeine Behandlung



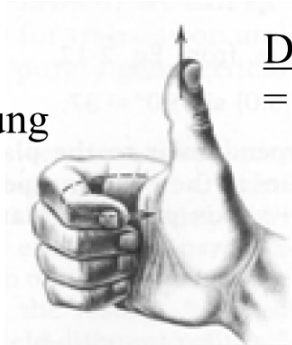
Klassisch: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$



Kreuzprodukt zweier Vektoren:

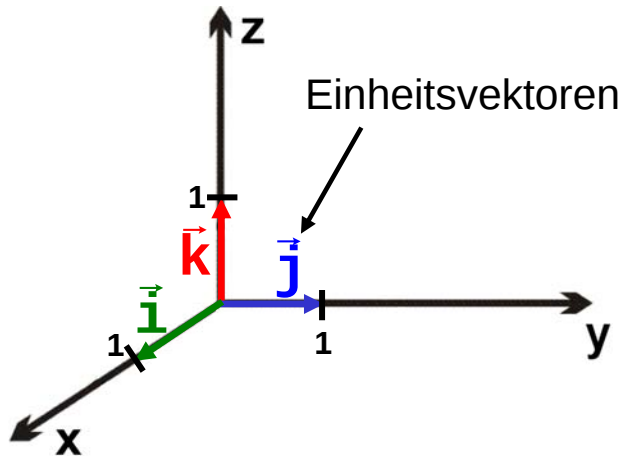
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin \beta$$

Bewegungsrichtung
des $\vec{e}$



Drehimpuls
= Daumen

Drehimpuls – Allgemeine Behandlung



Vektordarstellung:

$$\vec{L} = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k}$$

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

$$\vec{p} = p_x \vec{i} + p_y \vec{j} + p_z \vec{k}$$

Vektorprodukt in Determinantenschreibweise:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} r_y & r_z \\ p_y & p_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} r_x & r_z \\ p_x & p_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ p_x & p_y \end{vmatrix} = \\ &= \underbrace{(r_y p_z - r_z p_y)}_{L_x} \vec{i} + \underbrace{(r_z p_x - r_x p_z)}_{L_y} \vec{j} + \underbrace{(r_x p_y - r_y p_x)}_{L_z} \vec{k} \end{aligned}$$

Drehimpuls – Quantenmechanische Behandlung

Klassisch:

$$\begin{aligned}\Rightarrow L_x &= r_y p_z - r_z p_y = y p_z - z p_y \\ L_y &= r_z p_x - r_x p_z = z p_x - x p_z \\ L_z &= r_x p_y - r_y p_x = x p_y - y p_x\end{aligned}$$

Quantenmech.: $p_x \rightarrow \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \dots \text{etc.}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \hat{L}_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \hat{L}_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Umrechnung in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \hat{L}_x &= i\hbar \left(\cot \vartheta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\ \hat{L}_y &= i\hbar \left(\cot \vartheta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} - \cos \phi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}\end{aligned}$$

Drehimpuls – Quantenmechanische Behandlung

Berechnung von: $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

$$\rightarrow \rightarrow \hat{L}^2 = -\hbar^2 \underbrace{\left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]}$$

entspricht dem Winkelanteil von $\nabla^2 = \nabla_{\vartheta, \phi}^2$

$\Rightarrow$ Zurückführen des Drehimpulsproblems auf das Problem des Starren Rotators mit freier Achse:

$$\hookrightarrow \text{SGL: } \nabla_{\vartheta, \phi}^2 \psi + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad | \cdot (-\hbar^2)$$

$$\Rightarrow -\hbar^2 \nabla_{\vartheta, \phi}^2 \psi = 2\mu r^2 E \psi$$

$$\Rightarrow \hat{L}^2 \psi = |\vec{L}|^2 \psi \quad \text{Eigenwertgleichung für } \hat{L}^2 ; \quad |\vec{L}|^2 = 2I \cdot E$$

Drehimpuls – Quantenmechanische Behandlung

Einsetzen der Energieeigenwerte des Starren Rotators:

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} \ell(\ell + 1)$$

$$\Rightarrow \hat{L}^2 = \cancel{2I} \cdot \frac{\hbar^2}{\cancel{2I}} \ell(\ell + 1) = \hbar^2 \ell(\ell + 1); \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \psi \equiv Y_{\ell, m}(\vartheta, \phi) \quad \text{Eigenfunktionen von } \hat{L}^2 = \text{Kugelflächenfunktionen}$$

$\Rightarrow$ Eigenwertgleichung für Quadrat des Drehimpulses:

$$\hat{L}^2 Y_{\ell, m}(\vartheta, \phi) = \hbar^2 \ell(\ell + 1) Y_{\ell, m}(\vartheta, \phi)$$

Wellenfunktion des H-Atoms ist auch eine Eigenfunktion von $\hat{L}^2$
 $\rightarrow$ Eigenwerte von $\hat{L}^2$ = scharfe Messwerte

$\Rightarrow$ erlaubte Werte für Drehimpuls:

$$|\vec{L}| = \sqrt{|\vec{L}|^2} = \hbar \sqrt{\ell(\ell + 1)}; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

Drehimpuls – Quantenmechanische Behandlung

Lassen sich die Komponenten des Drehimpulsvektors im Experiment simultan zu $\hat{L}^2$ bestimmen?

$\Rightarrow$ Prüfen der Kommutatoren $\rightarrow \rightarrow \left[\hat{L}_x, \hat{L}_y \right] = i\hbar \hat{L}_z$

$$\left[\hat{L}_y, \hat{L}_z \right] = i\hbar \hat{L}_x$$
$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_x \right] = i\hbar \hat{L}_y$$

$\Rightarrow$ Es lässt sich im Experiment nur eine Komponente des Drehimpulsvektors exakt messen (Heisenbergsche Unschärfe-Relation!)

$\Rightarrow$ Kommutatoren mit $\hat{L}^2$: $\rightarrow \rightarrow \left[\hat{L}^2, \hat{L}_x \right] = \left[\hat{L}^2, \hat{L}_y \right] = \left[\hat{L}^2, \hat{L}_z \right] = 0$

$\hat{L}^2$ kommutiert mit allen Komponenten-Operatoren

$\Rightarrow$ Im Experiment lassen sich das Betragsquadrat des Drehimpulses und eine Komponente des Drehimpulsvektors simultan bestimmen.

Drehimpuls – Quantenmechanische Behandlung

Wahl von $\hat{L}_z$ - Operator hat die einfachste Form $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$

Eigenwertgleichung: $\hat{L}_z \psi = L_z \cdot \psi$ $\psi = ?$

Ansatz: $\psi = Y_{\ell, m}(\vartheta, \phi)$ $\hat{L}^2, \hat{L}_x$ kommutieren
 $\Rightarrow$ es existiert ein gemeinsamer Satz von Eigenfunktionen

Prüfen durch Einsetzen:

$$\hat{L}_z Y_{\ell, m_\ell}(\vartheta, \phi) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} P_{\ell, m_\ell}(\cos \vartheta) \cdot e^{im_\ell \phi} = L_z \cdot P_{\ell, m_\ell}(\cos \vartheta) \cdot e^{im_\ell \phi} \quad \ell \geq m_\ell$$

$$\Rightarrow P_{\ell, m_\ell}(\cos \vartheta) \cdot (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \phi} e^{im_\ell \phi} = L_z \cdot P_{\ell, m_\ell}(\cos \vartheta) \cdot e^{im_\ell \phi} \quad \Bigg| \div P_{\ell, m_\ell}(\cos \vartheta)$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwertgleichung: } \hat{L}_z e^{im_\ell \phi} = L_z \cdot e^{im_\ell \phi} \quad = \text{Starrer Rotator mit raumfester Achse}$$
$$L_z = m_\ell \hbar \quad m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Drehimpuls – Quantenmechanische Behandlung

Damit ergeben sich folgende Quantisierungsbedingungen für den Drehimpuls:

$$|\vec{L}| = \sqrt{|\vec{L}|^2} = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}; \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

$$L_z = m_\ell \hbar \quad m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, 0, 1, \ell-1, +\ell$$