Institut für Physikalische Chemie
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Lösungen zum Übungsblatt 9
zur Vorlesung Physikalische Chemie II
WS 2008/09 Prof. E. Bartsch

9.1 Die experimentelle Bestimmung der Geschwindigkeit einer Kugel (m = 50 g) und der Geschwindigkeit eines Elektrons (m = 9.1· 10^{-28} g) ergebe denselben Wert, nämlich 300 m/s, mit einer Ungenauigkeit von 0.01%. Welches ist die minimale Ungenauigkeit („Unschärfe“), mit der man den Ort der beiden Objekte bei einer simultanen Messung (zusammen mit der Geschwindigkeit) bestimmen könnte?

Lösung:

Für das Elektron:

$$p = mv = 9.1 \cdot 10^{-31} kg \times 300 \, m/s = 2.7 \cdot 10^{-28} \; kg \, m/s$$

und

$$\Delta p = m\Delta v = 0.0001 \times 2.7 \cdot 10^{-28} \, kg \, m/s = 2.7 \cdot 10^{-32} \, kg \, m/s \, .$$

Damit folgt:

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \, J \, s}{4\pi \times 2.7 \cdot 10^{-32} \; kg \, m/s} = 2 \cdot 10^{-3} \, m = 0.2 \, cm \, .$$

Für die Kugel:

$$p = mv = 0.05 \, kg \times 300 \, m/s = 15 \, kg \, m/s$$

und

$$\Delta p = m\Delta v = 0.0001 \times 15 \, kg \, m/s = 1.5 \cdot 10^{-3} \, kg \, m/s \, .$$

Damit folgt:

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \, J \, s}{4\pi \times 1.5 \cdot 10^{-3} \; kg \, m/s} = 3 \cdot 10^{-32} \, m \, .$$

Wie man sieht, setzt das Unschärfeprinzip für makroskopische Objekte wie Kugeln keine praktisch relevante Grenze für die Genauigkeit der Messung; Δx beträgt in diesem Fall ein 10^{-17}tel des Durchmessers eines Atomkerns. Für mikroskopische

Objekte, wie ein Elektron, stellt das Unschärfeprinzip jedoch eine praktische Obergrenze der Messgenauigkeit dar; Δx entspricht in diesem Fall dem 10^7fachen eines Atomdurchmessers.

9.2 Ein Atom kann zu jedem Zeitpunkt nach seiner Anregung elektromagnetische Strahlung aussenden. Im Experiment findet man eine typische mittlere. Lebensdauer eines Atoms von ca. 10^{-8} s; d.h. in dieser Zeit emittiert ein angeregtes Atom ein Photon und kehrt in den Grundzustand zurück.

a) Wie große ist die minimale Unschärfe $\Delta\nu$ in der Frequenz des Photons?

b) Die meisten Photonen, die von Natriumatomen abgestrahlt werden, korrespondieren zu zwei Spektrallinien mit Wellenlängen um λ = 589 nm. Wie groß ist die relative Linienbreite $\Delta\nu/\nu$ der Spektrallinien?

c) Berechnen Sie die Energieunschärfe ΔE des angeregten Zustands des Atoms.

d) Berechnen Sie aus den vorhergehenden Ergebnissen mit einer Genauigkeit ΔE die Energie E des angeregten Zustands eines Natriumatoms relativ zu seinem Grundzustand.

Lösung:

a) Aus $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ folgt:

$$\Delta \nu \Delta t \geq \frac{1}{4\pi}$$

oder

$$\Delta \nu \geq \frac{1}{4\pi\Delta t}$$

Mit $\Delta t = 10^{-8}$s erhalten wir $\Delta \nu \geq 8 \cdot 10^6$ s^{-1}.

b) Für λ = 589 nm erhalten wir

$$\nu = c/\lambda = 3 \cdot 10^8 m / 589 \cdot 10^{-9} m = 5.1 \cdot 10^{14} s^{-1}.$$

Damit ergibt sich

$$\Delta \nu/\nu = 8 \cdot 10^6 s^{-1} / 5.1 \cdot 10^{14} s^{-1} = 1.6 \cdot 10^8 .$$

c) Die Energie des angeregten Zustands kann nicht präzise bestimmt werden, weil nur eine endliche Zeit zur Messung zur Verfügung steht. Das Atom bleibt nicht unendlich lange Zeit im angeregten Zustand, sondern fällt unter Emission eines Photons in den Grundzustand zurück. Die Verteilung der Photonen-Energie ist gleich der Verteilung der Energie des angeregten Zustands des angeregten Atoms in Übereinstimmung mit dem Energieerhaltungsatz. Identifiziert man Δt mit der mittleren Lebensdauer des angeregten Zustands, so ergibt sich

$$\Delta E \geq \frac{h/4\pi}{\Delta t} = \frac{h}{4\pi\Delta t} = \frac{6.63\cdot 10^{-34}\,Js}{4\pi\times 10^{-8}\,s} =$$

$$= \frac{4.14\cdot 10^{-15}\,eV\,s}{4\pi\times 10^{-8}\,s} \cong 3.3\cdot 10^{-8}\,eV.$$

d) Wir haben

$$\Delta\nu/\nu = h\Delta\nu/h\nu = \Delta E/E.$$

Somit ist

$$E = \frac{\Delta E}{\Delta\nu/\nu} = 3.3\cdot 10^{-8}\,eV/1.6\cdot 10^{-8} = 2.1\,eV,$$

wobei die Ergebnisse aus b) und c) verwendet wurden.

9.3 Es wird die y-Koordinate eines Elektrons experimentell bestimmt, welches Bestandteil eines Parallelstrahl ist, der sich in x-Richtung bewegt, indem ein enger Spalt der Breite Δy in den Strahl eingebracht wird. Zeigen Sie, dass durch diese Messung eine Unschärfe Δp_y des Impulses des Elektrons in y-Richtung entsteht, für die gemäß dem Heisenbergschen Unschärfeprinzips $\Delta p_y \Delta y \geq \hbar/2$ gilt. Betrachten Sie dazu die Beugung der mit dem Elektron assoziierten Welle, die in Abb.1 dargestellt ist.

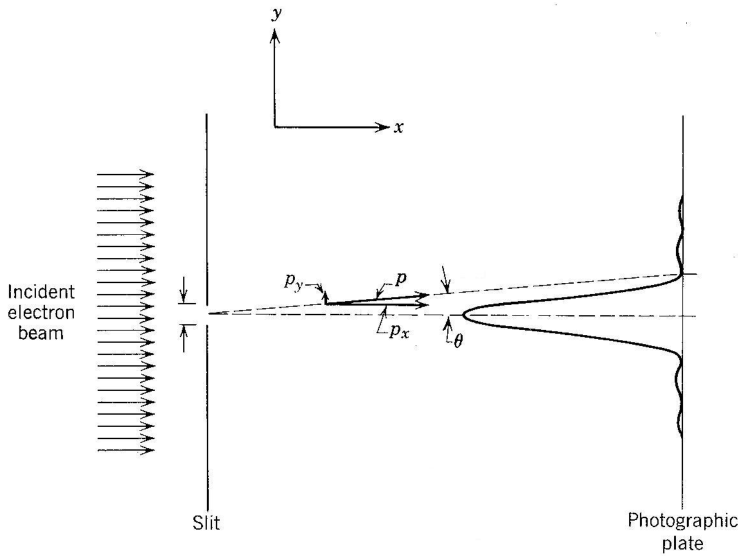

Abb.1. Messung der y-Koordinate eines Elektrons in einem breiten Parallelstrahl durch Einbringen eines Spalts (Blende). Der Intensitätsverlauf der gebeugten Elektronenwelle ist entlang der Linie aufgetragen, welche die photographische Platte symbolisiert (= y-Achse).

Lösung:

Bei der Propagation durch den in Abb.1 gezeigten Aufbau wird die Welle am Spalt gebeugt. Der die Lage des ersten Beugungsminimums am „Einfachspalt“ definierende Winkel θ ist durch die Bedingung

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{\Delta y}$$

gegeben. Da die Propagation der Welle die Bewegung des assoziierten Teilchens bestimmt, gibt das Beugungsmuster (der Intensitätsverlauf) auch die relativen Wahrscheinlichkeiten an, dass das Elektron an den verschiedenen Orten auf der photographischen Platte auftrifft. Somit wird das Elektron, welches den Spalt passiert, um einen Winkel abgelenkt, der irgendwo zwischen $-\theta$ und $+\theta$ liegen kann. Obwohl der Wert des Impulses in y-Richtung, $p_y = 0$, vor dem Spalt sehr genau bekannt war (da über die Position in y-Richtung gar nichts bekannt war), kann der Impuls in y-Richtung nach Durchgang durch die Blende, mit der die Position in y-Richtung gemessen wurde, jeden Wert zwischen $–p_y$ und $+ p_y$ annehmen, wobei

$$\frac{p_y}{p} = \sin\theta .$$

Somit wird der Impuls in y-Richtung durch die Messung der y Position und der damit verbundenen Beugung der Welle unscharf. Diese Unschärfe ist gegeben durch

$$\Delta p_y \cong 2p_y = 2p\sin\theta = \frac{2p\lambda}{\Delta y} .$$

Mit der de Broglie Beziehung $p = h/\lambda$ erhält man

$$\Delta p_y = \frac{2h}{\Delta y}$$

oder

$$\Delta p_y \Delta y = 2h .$$

Das Ergebnis steht im Einklang mit der Unschärferelation.

9.4 Betrachten Sie ein mikroskopisches Teilchen, welches sich frei entlang der x-Achse bewegt. Nehmen Sie an, dass zum Zeitpunkt t = 0 die Position des Teilchens bestimmt wird und dass die Ungenauigkeit der Messung Δx_0 beträgt. Berechnen Sie die Unschärfe in der zu einem späteren Zeitpunkt t gemessenen Position des Teilchens.

Lösung:

Die Unschärfe des Impulses des Teilches zum Zeitpunkt t = 0 ist mindestens

$$\Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x_0} .$$

Daher ist die Geschwindigkeit des Teilchens zu diesem Zeitpunkt unbestimmt in der Größenordnung

$$\Delta v_x = \Delta p_x / m = \frac{\hbar}{2m\Delta x_0}$$

und die Wegstrecke x, die das Teilchen in der Zeit t zurücklegt, kann nicht genauer bestimmt werden als

$$\Delta x = t\Delta v_x = \frac{\hbar t}{2m\Delta x_0}.$$

Wenn man das Teilchen zum Zeitpunkt t = 0 bis auf eine Unschärfe Δx_0 lokalisiert, dann wird man es in einer Messung zum späteren Zeitpunkt t irgendwo innerhalb eines Bereichs finden, der mindestens Δx groß ist. Man bemerke, dass Δx umgekehrt proportional zu Δx_0 ist. Das bedeutet, je sorgfältiger wir die Anfangsposition des Teilchens messen, desto weniger werden wir über seine Endposition wissen! Außerdem wächst die Unschärfe linear mit der Zeit. Dies entspricht einem zeitlichen „Auffasern“ der mit dem Teilchen assoziierten Wellengruppe.