**Institut für Physikalische Chemie**
**Albert-Ludwigs-Universität Freiburg**

**Lösungen zum Übungsblatt 8**
**zur Vorlesung Physikalische Chemie II**
**WS 2008/09 Prof. E. Bartsch**

8.1 Die folgenden Daten wurden für die photoelektrische Emission eines Elektrons aus metallischem Calcium erhalten:

| $\lambda$ /nm | 253,6 | 313.2 | 365.0 | 404.7 |
|---|---|---|---|---|
| $eU_{max}$/eV | 1.95 | 0.98 | 0.50 | 0.14 |

Bestimmen Sie die Austrittsarbeit sowie die Plancksche Konstante!

**Lösung:**

Wir betrachten die Energiebilanz:

$$h\nu = \frac{1}{2}mv + W_A$$

und ersetzen die kinetische Energie der Elektronen durch die potentielle Energie $(eU_{max})$

$$h\nu = eU_{max} + W_A \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} eU_{max} &= h\nu - W_A \\ y &= mx + b \end{aligned}$$

Dies ist eine Geradengleichung. Wir berechnen aus der Wellenlänge die Frequenz $(c = \nu\lambda)$ und tragen $eU_{max}$ gegen die Frequenz auf.

Tabelle:

$$1\,eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,AsV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J$$

| $\lambda$ / nm | 253,6 | 313,2 | 365 | 404,7 |
|---|---|---|---|---|
| $\nu / 10^{15}$ s | 1,18 | 0,958 | 0,822 | 0,7401 |
| $eU_{max}$ / eV | 1,95 | 0,98 | 0,50 | 0,14 |
| $eU_{max}$ / $10^{-19}$ J | 3,12 | 1,57 | 0,80 | 0,22 |

8.2 Ein Taucher dringt in der Tiefe in eine dunkle Welt vor. Der mittlere molare Absorptionskoeffizient des Seewassers liegt im Sichtbaren bei $\varepsilon = 6{,}2 \cdot 10^{-5} M^{-1} cm^{-1}$; in welcher Tiefe wird ein Taucher

a) die Hälfte der Intensität an der Oberfläche,

b) ein Zehntel davon antreffen?

**Lösung:**

Der Absorptionskoeffizient ist in den Einheiten $M^{-1}cm^{-1}$ gegeben. Wir berechnen zunächst die Konzentration des Wassers in der Einheit $molL^{-1}$.
Das Volumen V = 1L enthält die Masse m = 1kg, die Molmasse des Wassers ist $M = 18\,gmol^{-1}$. Damit erhalten wir:

$$c = \frac{n}{V} = \frac{m}{MV} = \frac{1kg}{18 \cdot 10^{-3}\,kgmol^{-1} \cdot 1L} = 55\,molL^{-1}.$$

Wir verwenden das Lambert-Beer'sche Gesetz:

$$I = I_0 \cdot 10^{-\varepsilon c \ell} \quad , \quad lg\frac{I}{I_0} = -\varepsilon c \ell$$

$$\ell = \frac{1}{-\varepsilon c} lg\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\varepsilon c} lg\frac{I_0}{I}$$

$$= \frac{1}{6{,}2 \cdot 10^{-5}\,M^{-1}cm^{-1} 55{,}5M} lg\frac{I_0}{I}$$

$$= 290\ cm \cdot lg\frac{I_0}{I}$$

a) $I = 0{,}5 I_0, \qquad lg\frac{I_0}{I} = lg\frac{I_0}{0{,}5 I_0} = lg 2$

$$\ell = 290\,cm \cdot lg 2 = 88\,cm$$

b) $I = 0{,}1 I_0, \qquad lg\frac{I_0}{I} = lg\frac{I_0}{0{,}1 I_0} = lg 10$

$$\ell = 290\,cm \cdot lg 10 = 290\,cm.$$

8.3 Bei der Lichtabsorption von Brom in $CCl_4$ wurden in einer 2,0 mm-Zelle für die Transmission die folgenden Werte gemessen:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $[Br_2]$/M | 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,050 | |
| | Transmission/% | 81,4 | 35,6 | 12,7 | $3{,}0 \cdot 10^{-3}$ |

Wie groß ist der molare Absorptionskoeffizient $\varepsilon$ des Broms bei der betreffenden Wellenlänge?

Lösung:

Die Transmission ist folgendermaßen definiert:

$$T = \frac{I}{I_0}$$

Das Lambert-Beer'sche Gesetz verwendet die Absorbanz:

$$A \quad = \lg \frac{I_0}{I} = \varepsilon\, c\, \ell$$

Setzen wir die Definition der Transmission ein, so erhalten wir:

$$\lg T = -\varepsilon\, c\, \ell\,.$$

Wir lösen nach dem Absorptionskoeffizienten $\varepsilon$ auf:

$$\varepsilon = -\frac{\lg T}{c\,\ell} = \frac{-\lg 0{,}814}{0{,}001\,\mathrm{mol\,L^{-1}} \cdot 0{,}2\,\mathrm{cm}} = 447\,\mathrm{M^{-1}\,cm^{-1}}$$

Wir verwenden die Daten der Tabelle.

| $[Br_2]$/M | 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,050 |
|---|---|---|---|---|
| T | 0,814 | 0,356 | 0,127 | $3 \cdot 10^{-5}$ |
| $\varepsilon / \mathrm{M^{-1}\,cm^{-1}}$ | 447 | 449 | 448 | 452 |

Mittelwert $\quad \bar{\varepsilon} = \frac{\sum \varepsilon_i}{N_i} = \frac{447 + 449 + 448 + 452}{4} = 449\,\mathrm{M^{-1}\,cm^{-1}}$

8.4 Ein Lichtstrahl von $3 \cdot 10^{10}$ Photonen pro s und einer Wellenlänge von 400 nm durchdringt 3,5 mm einer Lösung, die eine absorbierende Substanz in der Konzentration $6{,}75 \cdot 10^{-4}$ M enthält. Dabei wird eine Transmission von 65,5 % gemessen.
Wie groß ist der molare dekadische Absorptionskoeffizient $\varepsilon$ der Substanz bei dieser Wellenlänge in $\mathrm{cm^2\,mol^{-1}}$? Berechnen Sie die Zahl der pro Sekunde absorbierten Photonen.

**Lösung:**

Transmission: $\quad T = \frac{I}{I_0}$

Lambert-Beer: $\quad A \quad = \lg \frac{I_0}{I} = \varepsilon\, c\, \ell = -\lg T$

$$\varepsilon = -\frac{\lg T}{c\,\ell} = \frac{-\lg 0{,}655}{6{,}75 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{M} \cdot 0{,}35\,\mathrm{cm}} = 777{,}8\,\mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1}$$

Einheiten:

$$\left[\mathrm{M}^{-1}\,\mathrm{cm}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{mol}\,\mathrm{L}^{-1}\,\mathrm{cm}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{mol\ cm}} = \frac{10^3\,\mathrm{cm}^3}{\mathrm{mol}\,\mathrm{cm}} = 10^3\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{mol}^{-1}\right]$$

$\varepsilon = 7{,}778 \cdot 10^5\,\mathrm{cm}^2\,\mathrm{mol}^{-1}$.

Für gebündelte Lichtstrahlen, wie sie in der Optik und Spektroskopie verwendet werden, gibt man üblicherweise die Intensität der Strahlung an.

$$\text{Intensität} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}, \quad I = \frac{dQ}{F\,dt}.$$

In Spektrometern gibt man die spektrale Intensität $I_\lambda$ sowie die Breite $d\lambda$ der Wellenlängenverteilung an.
Verwendet man das Photonenbild zur Beschreibung der Strahlung, so gibt man die Zahl der Photonen und deren Energie an, d.h.:

$Q = \sum N_i \varepsilon_i$ wobei $N_i$ die Zahl der Photonen mit der Energie $\varepsilon_i$ ist.

Wenn es sich um eine monochromatische Strahlung handelt, haben alle Photonen die gleiche Energie und wir erhalten:

$$dQ = \varepsilon_i\,dN \quad \text{und} \quad I = \frac{\varepsilon_i\,dN}{F\,dt}$$

Die Zahl der absorbierten Photonen berechnet sich wie folgt:

$$\frac{dN}{dt}(\text{abs}) = \frac{dN}{dt}(\text{ein}) - \frac{dN}{dt}(\text{aus})$$

$$I(\text{abs}) = I_0 - I(\text{aus}).$$

Die Energie der austretenden Strahlung berechnen wir nach dem Lambert-Beer'schen Gesetz.

$$I(\text{aus}) = I_0 \cdot 10^{-\varepsilon c \ell}$$

Damit ergibt sich für $I(\text{abs})$

$$I(\text{abs}) = I_0(1 - 10^{-\varepsilon c \ell}) \quad \Big| \cdot \frac{F}{\varepsilon_i}$$

$$\frac{dN}{dt}(abs) = \left(\frac{dN}{dt}\right)_0 (1-10^{-\varepsilon c \ell})$$

$$= 3\cdot 10^{10}\ s^{-1}(1-10^{-777,8 M^{-1}cm^{-1}\cdot 6,74\cdot 10^{-4} M\cdot 0,35 cm})$$

$$= 1,03\cdot 10^{10}\ s^{-1}.$$

Da wir die Energie eines Photons kennen, können wir auch die pro Zeit absorbierte Energie ausrechnen, die letztlich zu einer Erwärmung der absorbierenden Lösung führt.

$$\frac{dQ(abs)}{dt} = \frac{dN}{dt}(abs)\cdot \varepsilon_i = \frac{dN}{dt}(abs)\cdot h\nu = \frac{dN}{dt}(abs)\cdot \frac{hc}{\lambda}$$

$$= \frac{1,03\cdot 10^{10}\ s^{-1}\cdot 6,6\cdot 10^{-34}\ Js\cdot 3\cdot 10^{8}\ ms^{-1}}{400\cdot 10^{-9}\ m}$$

$$= 5,1\cdot 10^{-9}\ Js^{-1}$$

Bestrahlen wir die Küvette 1 Stunde lang, so ist die absorbierte Energie:

$$\Delta E = 5,1\cdot 10^{-9}\ Js^{-1}\cdot 3600\ s = 1,8\cdot 10^{-5}\ J.$$

Enthält die Küvette $1mL\,(=1g)$ Wasser, so erwärmt sie sich folgendermaßen:
$\left(c_p\left(H_2O\right) = 4,19\ J\,K^{-1}g^{-1}\right)$:

$$\Delta H = C_p \Delta T = Q$$

$$\Delta T = \frac{Q}{C_p} = \frac{Q}{c_p m} = \frac{1,8\cdot 10^{-5}\ J}{4,19\ JK^{-1}g^{-1}g} = 4,3\cdot 10^{-6}\ K$$

Wie sieht die Erwärmung aus, wenn Licht mit einer Intensität von 600 W $m^{-2}$ auf die Erdoberfläche fällt?

a) In einer Schicht von 3 m Wasser werden 90 % der einfallenden Intensität absorbiert ($c_p\left(H_2O\right) = 4,19\ J\,K^{-1}g^{-1}$

b) Auf Sand bzw. Steinen wird in einer Schicht von 1 mm 90 % der Strahlung absorbiert $c_p\left(SiO_2\right) = 0,74\ J\,K^{-1}g^{-1}$

8.5 Im Bohr'schen Modell des Wasserstoffatoms kreisen Kern und Elektron um den gemeinsamen Schwerpunkt. In einem vereinfachten Ansatz wird nur die Kreisbewegung des Elektrons um den ruhenden Kern betrachtet.

a) Leiten Sie Ausdrücke für die Bahnradien und die Energiezustände her! Hinweise: Beachten Sie, dass der Drehimpuls des Systems der

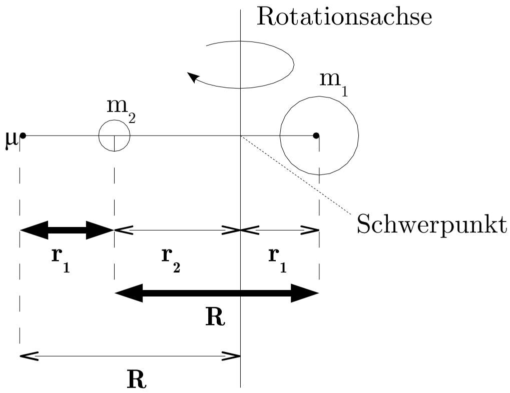
Quantenbedingung unterliegt. Beachten Sie ferner, dass die Rotation zweier Teilchen der Masse $m_K$ und $m_e$ um den gemeinsamen Schwerpunkt S sich auf die Rotation eines Teilchens mit der reduzierten Masse μ ($\mu = m_K \cdot m_e/(m_K + m_e)$) zurückführen lässt.

b) Wie groß ist der Energieunterschied für die erste Linie der Balmer-Serie? Geben Sie den Wert in den Einheiten „J“, „$kJmol^{-1}$“, „eV“, „$cm^{-1}$“, und „Hz“ an!

**Lösung:**

Die Rotation zweier Massen um einen Schwerpunkt muss man durch Angabe der beiden Massen und ihrer Abstände zum Schwerpunkt beschreiben. Man kann dies formal durch Rotation einer Masse um den Schwerpunkt beschreiben:

a) Die Rotation eines Körpers beschreibt man durch die Rotation um drei Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen.




In unserem Modell liegen die beiden Massen im Abstand R auf einer Achse (praktisch punktförmig)

Für die Lage des Schwerpunktes gilt dann: $m_1 r_1 = m_2 r_2.$

Der Abstand R ist: $R = r_1 + r_2$

Ersetzen wir $r_2$, ergibt sich:

$$m_1 r_1 = m_2 (R - r_1)$$

$$r_1 (m_1 + m_2) = m_2 R$$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R$$

und entsprechend:

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R$$

Das Trägheitsmoment ist definiert als

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 \, dm$$

mit r = Abstand der Masse dm von der Drehachse.

Hat man 2 punktförmige Massen im Abstand $r_1$ und $r_2$, so ergibt sich:

$$I = r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 \qquad \text{(allgemein: } I = \sum_i m_i r_i^2 \text{)}$$

Wir ersetzen $r_1$ und $r_2$ durch die entsprechenden Ausdrücke für R (2.4.3.2 und 2.4.3.3) und erhalten:

$$I = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 R^2 m_1 + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 R^2 m_2$$

$$= R^2 \left\{\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2\, m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\right\} = R^2 \left\{\frac{m_1 m_2 (m_2 + m_1)}{(m_1 + m_2)^2}\right\}$$

$$= R^2 \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$$

Man nennt

$$\frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2} = \mu \text{ die reduzierte Masse.}$$

Wir erhalten für das Trägheitsmoment damit

$I = \mu R^2$

d.h. die Rotation zweier Massen im Abstand $r_1$, $r_2$ haben wir durch die Rotation einer Masse μ im Abstand R beschrieben.

Bei der Bohr'schen Beschreibung gehen wir von einem Kräftegleichgewicht bei der Bewegung des Elektrons aus.

$$F_z + F_c = 0 \Rightarrow \quad -F_c = F_z$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{\mu v^2}{r}$$

Der Drehimplus ist nach Bohr „gequantelt“, d.h. ganzzahliges Vielfache von $\hbar$:

$\mu v r = n\hbar$

Um diese Bedingung in das Kräftegleichgewicht einzusetzen, formen wir diese um:

1. Dividieren durch r:

$$\mu v = \frac{n\hbar}{r}$$

2. Quadrieren:

$$\mu^2 v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{r^2}$$

3. Dividieren durch $\mu r$ :

$$\frac{\mu v^2}{r} = \frac{n^2\hbar^2}{\mu r^3}$$

Dies setzen wir ein und erhalten:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{n^2\hbar^2}{\mu r^3}$$

Wir lösen nach r auf:

$$r = \frac{n^2\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{\mu e^2} = \frac{n^2\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{e^2 \frac{m_k\, m_e}{m_k + m_e}} = \frac{n^2\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0 \left(m_k + m_e\right)}{e^2\, m_k\, m_e} = \frac{n^2\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{e^2\, m_e}\left(1 + \frac{m_e}{m_k}\right)$$

Der erste Term beschreibt den Radius, wenn die Masse des Kerns sehr schwer gegen die Masse des Elektrons ist, d. h. der Schwerpunkt im Zentrum des Kerns liegt. Der zweite Term ist der Korrekturterm, der auf Grund der Rotation um den gemeinsamen Schwerpunkt zu Stande kommt.

Für n = 1 nennt man den Radius den Bohr'schen Radius $a_0$.

$$a_0 = \frac{1^2\hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e\, e^2} = \frac{1^2(1\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js})^2 \cdot 4\pi 8{,}9\cdot 10^{-12}\,\mathrm{AsV^{-1}m^{-1}}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}(1{,}6\cdot 10^{-19})^2(\mathrm{As})^2}$$

Einheiten: $\left[\frac{J^2\, s^2\, AsV^{-1}m^{-1}}{kg\, A^2 s^2} = \frac{kg m^2 s^{-2}\, AsV\, s^2 AsV^{-1}m^{-1}}{kg\, A^2 s^2} = m\right]$

mit: $J = kgm^2s^{-2} = AsV$ , $J^2 = kgm^2s^{-2}\, AsV$

$$a_0 = 5{,}29\cdot 10^{-11}\mathrm{m} = 52{,}9\,\mathrm{pm}$$

(alte Einheit: Ångström $Å = 10^{-10}\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{pm}$ )

$$r = a_0\left(1 + \frac{m_e}{m_k}\right) = 52{,}9\,\mathrm{pm}\left(1 + \frac{0{,}00055\, m_u}{1{,}0078\, m_u}\right) = 52{,}9\,\mathrm{pm}\cdot 1{,}000546 = 52{,}92\,\mathrm{pm}$$

Betrachtet man die Quantenzahl n=10, vergrößert sich der Radius um den Faktor 100.

**Energie**:

Die Energie des ruhenden H-Atoms setzt sich aus der kinetischen und potentiellen Energie des Elektrons zusammen:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot}$$

Die potentielle Energie des Elektrons berechnen wir wie folgt:

$$E_{pot} = -\int_{\infty}^{r} F_c \, dr \,, \qquad F_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$Q_1 = -e \ , \ Q_2 = +e \quad F_c = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

$$E_{pot} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2} dr = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \bigg|_{\infty}^{r} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \bigg|_{\infty}^{r} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Die kinetische Energie des Elektrons und des Kerns ist:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \mu v^2$$

Die Größe $\mu v^2$ können wir aus der Gleichung für das Kräftegleichgewicht entnehmen:

$$\mu v^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Wir erhalten für die kinetische Energie: $\quad E_{kin} = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}$

und für die Gesamtenergie ergibt sich:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Ersetzen wir noch r mit Hilfe der vorher abgeleiteten Gleichung, ergibt sich:

$$E_{ges} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2 e^2 m_e}{n^2 \hbar^2 \cdot 4\pi\varepsilon_0 \left( 1 + \frac{m_e}{m_k} \right)}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{e^4 m_e}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{m_e}{m_k} \right)} \cdot \frac{1}{n^2}$$

b) Energieunterschied des H-Atoms für die erste Linie der Balmer-Serie. Diese entspricht bei Absorption dem Übergang von $n_2$ =2 nach $n_3$ = 3. Wir erhalten:

$$E_3 - E_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{e^4\, m_e}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{m_e}{m_k}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4\pi 8{,}9 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{AsV^{-1}m^{-1}}}\right)^2 \cdot \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As})^4\; 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}{(1 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js})^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{0{,}0005 m_u}{1{,}0078 m_u}\right)} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)$$

Einheiten: $\left[\frac{(\mathrm{As})^4\,\mathrm{kg}}{(\mathrm{As})^2\left(\mathrm{V^{-1}m^{-1}}\right)^2 (\mathrm{VAs})^2\,\mathrm{s}^2} = \frac{\mathrm{kg m^2}}{\mathrm{s^2}} = \mathrm{J}\right]$

$$E_3 - E_2 = 3{,}026 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Wenn der Kern sehr schwer gegenüber dem Elektron ist, rotiert das Elektron um den Kernschwerpunkt. Dann wird der Korrekturfaktor

$\left(1 + \frac{m_e}{m_k}\right) \simeq 1$ und wir erhalten:

$$E_3 - E_2 = 3{,}0276 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Der Energieunterschied für diesen Übergang mit und ohne Korrektur ist

$$\Delta E = \left(E_3 - E_2\right)_{\text{ohne}} - \left(E_3 - E_2\right)_{\text{mit}} = 3{,}0276 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} - 3{,}026 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 1{,}6 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{J}$$

**Umrechnung in andere Einheiten:**

Energieänderung für 1mol Übergänge:

$$\Delta E(1\mathrm{mol}) = \Delta E \cdot N_A = 1{,}6 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{J} \cdot 6 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{mol^{-1}} = 99{,}4\,\mathrm{Jmol^{-1}}$$

Die Ladung eines Elektrons ist: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$ , die Energieeinheit Elektronenvolt ist: $1\mathrm{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{AsV}$ , $1\mathrm{J} = \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\,\mathrm{eV}$ .

Damit erhalten wir:

$$\Delta E = 1{,}6 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{J} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-22}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\,\mathrm{eV} = 10^{-3}\,\mathrm{eV}$$

$$\Delta E = h\nu \quad , \quad \nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1{,}64 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{J}}{6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}} = 2{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{s^{-1}} = 2{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Hz}$$

Bei elektromagnetischer Strahlung bezeichnet man die Einheit $s^{-1}$ als Hertz (Hz): $s^{-1}$ = Hz

$$\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad , \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{\Delta E}{hc} = \frac{1{,}64 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{J}}{6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{ms^{-1}}} = 8{,}3\,\mathrm{cm^{-1}}$$

Man verwendet für die Wellenzahl $\frac{1}{\lambda}$ auch das Symbol $\tilde{\nu}$.

$$\frac{1}{\lambda} = \tilde{\nu} \qquad \text{Einheit: cm}^{-1}.$$

Diese Größe gibt an, wie viel Wellenlängen in 1 cm passen, d.h. die Zahl der Wellen pro cm.

8.6 Deuterium unterscheidet sich vom Wasserstoffatom nur durch seine Kernmasse. Die erste Linie der Lyman-Serie liegt für Wasserstoff H bei 82259,098 $cm^{-1}$, für Deuterium D bei 82281,476 $cm^{-1}$. Berechnen Sie aus diesen Angaben die Masse des Deuterons.

**Lösung:**

Die Rydbergkonstante bei unendlichem schwerem Kern ist:

$$R_\infty = \frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$$

Wenn wir berücksichtigen, dass Elektron und Kern um einen gemeinsamen Schwerpunkt kreisen, muss man die Masse $m_e$ des Elektrons durch die reduzierte Masse ersetzen:

$$\mu_H = \frac{m_e\, m_p}{m_e + m_p}$$

Dann lautet die Rydbergkonstante fürs H-Atom:

$$R_H = R_\infty \frac{\mu_H}{m_e} = R_\infty \frac{m_e \cdot m_p}{m_e(m_e + m_p)} = R_\infty \frac{m_p}{m_e + m_p} = R_\infty \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}}$$

$$R_D = R_\infty \frac{\mu_D}{m_e} = R_\infty \frac{m_D}{m_e + m_D} = R_\infty \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_D}}$$

Die Wellenzahl einer Spektrallinie beim Übergang $n_2$ nach $n_1$ ist gegeben durch:

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

Für das Verhältnis der Wellenzahlen des gleichen Übergangs $n_2$ nach $n_1$ für H und D erhalten wir also:

$$\frac{\tilde{\nu}_H}{\tilde{\nu}_D} = \frac{R_H}{R_D} = \frac{R_\infty}{R_\infty} \frac{\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right)^{-1}}{\left(1 + \frac{m_e}{m_D}\right)^{-1}} = \frac{1 + \frac{m_e}{m_D}}{1 + \frac{m_e}{m_p}}$$

Auflösen nach $m_D$ ergibt:

$$m_D = m_e\left(\frac{\tilde{\nu}_H}{\tilde{\nu}_D}\left(1+\frac{m_e}{m_p}\right)-1\right)^{-1}$$

$$m_D = 0{,}00055\,m_u\left(\frac{82259{,}098\,\text{cm}^{-1}}{82281{,}476\,\text{cm}^{-1}}\left(1+\frac{0{,}00055\,m_u}{1{,}0073\,m_u}\right)-1\right)^{-1}$$

$$m_D = 0{,}00055\,m_u\cdot\left(0{,}999728\cdot(1+5{,}46\cdot10^{-4})-1\right)^{-1}$$

$$m_D = 2{,}00828\,m_u = 2{,}00828\cdot1{,}66\cdot10^{-27}\,\text{kg} = 3{,}33\cdot10^{-27}\,\text{kg}$$