Institut für Physikalische Chemie
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
WS2008/2009

Übungen zur Vorlesung Physikalische Chemie II
Prof. Dr. E. Bartsch
(L = leicht, M = mittel, S = schwer)
10. Übungsblatt

10.1 L Beweisen Sie, dass $\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$ notwendigerweise reell und entweder positiv oder null ist. Hinweis: Schreiben Sie die Wellenfunktion als Summe eines Realteils $R(x,t)$ und eines Imaginärteils $I(x,t)$.

10.2 L Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, welches sich auf der x-Achse frei zwischen $x = -a/2$ und $x = +a/2$ bewegen kann, dessen Aufenthalt außerhalb dieser Region strikt verboten ist. Dieses Teilchen bewegt sich zwischen den Wänden eines eindimensionalen Kastens bei $x = -a/2$ und $x = +a/2$ hin und her. Die Wände seien als undurchdringlich angenommen, egal wieviel Energie das Teilchen besitzt (diese Annahme ist eine nützliche Näherung für viele quantenphysikalische Probleme). Aus der Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung findet man für den Zustand des Teilchens mit der niedrigsten Energie (den „Grundzustand“) die folgende Wellenfunktion

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} A\cos\dfrac{\pi x}{a} e^{-iEt/\hbar} & -a/2 < x < +a/2 \\ 0 & x \le -a/2 \quad oder \quad x \ge +a/2\,, \end{cases}$$

wobei A eine reelle (Normierungs)Konstante ist und E die Gesamtenergie des Teilchens im Grundzustand bedeutet. a) Stellen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung für das Kasteninnere auf und zeigen Sie, dass die angegebene Wellenfunktion eine Lösung ist. b) Welche Anforderung ergibt sich daraus für die Gesamtenergie? c) Zeichnen Sie die Wellenfunktion für t = const für den gesamten x-Bereich.

10.3 L Berechnen Sie die Normierungskonstante A der Wellenfunktion des Teilchens im Kasten aus Aufgabe 10.2.
Hinweis: $\int \cos^2 bx = (1/2)x + (1/4b)\sin(2ax) + const$.

10.4 M Berechnen Sie für das Teilchen im Kasten aus Aufgabe 10.2 die Erwartungswerte für x, p_x, x^2 und p_x^2.
Hinweis: $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$