Institut für Physikalische Chemie
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Lösungen zum 3. Übungsblatt zur Vorlesung Physikalische Chemie I
SS 2013
Prof. Dr. Bartsch

3.1 L

Ein 2.0 L Glaskolben enthalte $0.8 \cdot 10^{23}$ Wasserstoffmoleküle. Der Druck des Gases beträgt 250 kPa.
a) Wie hoch ist seine Temperatur?
b) Berechnen Sie die Wurzel des mittleren Geschwindigkeitsquadrats der Moleküle.
c) Findet man für Sauerstoffmoleküle eine andere Temperatur?

Lösung:

a) Ideales Gasgesetz: $PV = nRT$

Stoffmenge: $n_{H_2} = \frac{N_{H_2}}{N_A} = \frac{0.8 \cdot 10^{23}}{6.022 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}} = 0.133\,\text{mol}$

Temperatur: $T = \frac{PV}{nR} = \frac{250000\,\cancel{\text{Pa}} \cdot 0.002\,\cancel{\text{m}^3}}{0.133\,\cancel{\text{mol}} \cdot 8.314\,\cancel{\text{J}}\,\text{K}^{-1}\,\cancel{\text{mol}^{-1}}} \cdot \frac{\cancel{\text{N}}\,\cancel{\text{m}^{-2}}}{\cancel{\text{Pa}}} \cdot \frac{\cancel{\text{J}}}{\cancel{\text{N}}\,\cancel{\text{m}}} = 452.7\,\text{K}$

b) $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.314\,\cancel{\text{J}}\,\cancel{\text{K}^{-1}}\,\cancel{\text{mol}^{-1}} \cdot 452.7\,\cancel{\text{K}}}{2\,\cancel{\text{g}}\,\cancel{\text{mol}^{-1}}} \cdot \frac{10^3\,\cancel{\text{g}}}{\cancel{\text{kg}}} \cdot \frac{\cancel{\text{kg}}\,\text{m}^2\text{s}^{-2}}{\cancel{\text{J}}}}\,2376\,\text{ms}^{-1}$

c) Nein; da P, V sowie n nicht verändert wurden und R konstant ist.

$$T = \frac{PV}{nR} = \frac{250000\,\cancel{\text{Pa}} \cdot 0.002\,\cancel{\text{m}^3}}{0.133\,\cancel{\text{mol}} \cdot 8.314\,\cancel{\text{J}}\,\text{K}^{-1}\,\cancel{\text{mol}^{-1}}} \cdot \frac{\cancel{\text{N}}\,\cancel{\text{m}^{-2}}}{\cancel{\text{Pa}}} \cdot \frac{\cancel{\text{J}}}{\cancel{\text{N}}\,\cancel{\text{m}}} = 452.7\,\text{K}$$

3.2 S

Ein kugelförmiger Ballon mit dem Radius 2 m soll bei 20°C und einem Außendruck von 101325 Pa (Meereshöhe) mit H_2 aufgeblasen werden. Man nehme an, dass die Ballonhülle aus flexiblem Material besteht.
a) Wie viel H_2 (Stoffmenge, Masse) braucht man?
b) Welche Masse kann der Ballon auf Meeresniveau tragen ($\rho_{Luft} = 1.204\ \text{kgm}^{-3}$)?
c) Wie groß wäre die Tragkraft bei Verwendung von He?

Lösung:

a) Volumen des Ballons: $V_{Ballon} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (2\,\text{m})^3 = 33.5\,\text{m}^3$

Ideales Gasgesetz: $PV = nRT$ →

$$n_{H_2} = \frac{1.01325 \cdot 10^5\,\cancel{\text{Pa}} \cdot 33.5\,\cancel{\text{m}^3}}{8.314\,\cancel{\text{J}}\,\text{mol}^{-1}\,\cancel{\text{K}^{-1}} \cdot (20 + 273.15)\,\cancel{\text{K}}} \cdot \frac{\cancel{\text{N}}\,\cancel{\text{m}^{-2}}}{\cancel{\text{Pa}}} \cdot \frac{\cancel{\text{J}}}{\cancel{\text{N}}\,\cancel{\text{m}}} = 1392.7\,\text{mol}$$

$m_{H_2} = n_{H_2} \cdot M_{H_2} = 1392,7\,\text{mol} \cdot 2\,\text{gmol}^{-1} = 2785,4\,\text{g}$

b) Taucht man einen Körper in Luft ein, so verdrängt er dabei Luft und erfährt dadurch einen Auftrieb. Die Auftriebskraft ist proportional zu der Masse der verdrängten Luft:
$\left|F_{\text{Auftrieb}}\right| = m_{\text{Luft}} \cdot g$

Der Körper wird von der Erde angezogen. Die Anziehungskraft ist proportional zu seiner Masse:
$\left|F_{\text{Anziehung}}\right| = m_{\text{Körper}} \cdot g$

Die Differenz der beiden Kräfte ergibt die Nutzlast:

$$\frac{\left|F_{\text{Auftrieb}}\right| - \left|F_{\text{Anziehung}}\right|}{g} = m_{\text{Luft}} - m_{\text{Körper}} = m_{\text{Nutz}}$$

Masse der Luft: $\rho = \frac{m}{V}$ → $m_{\text{Luft}} = \rho \cdot V$
$m_{\text{Luft}} = 1.204\,\text{kgm}^{-3} \cdot 33.5\,\text{m}^3 = 40.3\,\text{kg}$

Masse des Körpers: $m_{H_2} = 2.785\,\text{kg}$ (siehe Teil a)
Nutzlast: $m_{\text{Nutz}} = m_{\text{Luft}} - m_{\text{Körper}} = 40.3\,\text{kg} - 2.8\,\text{kg} = 37.5\,\text{kg}$

c) Es ergibt sich aus der Gasgleichung die gleiche Stoffmenge n wie für H_2. Für die Masse des Heliums erhalten wir: $m_{\text{He}} = n_{\text{He}} \cdot M_{\text{He}} = 1393\,\text{mol} \cdot 4\,\text{gmol}^{-1} = 5.572\,\text{kg}$
Nutzlast: $m_{\text{Nutz}} = m_{\text{Luft}} - m_{\text{Körper}} = 40.3\,\text{kg} - 5.6\,\text{kg} = 34.7\,\text{kg}$

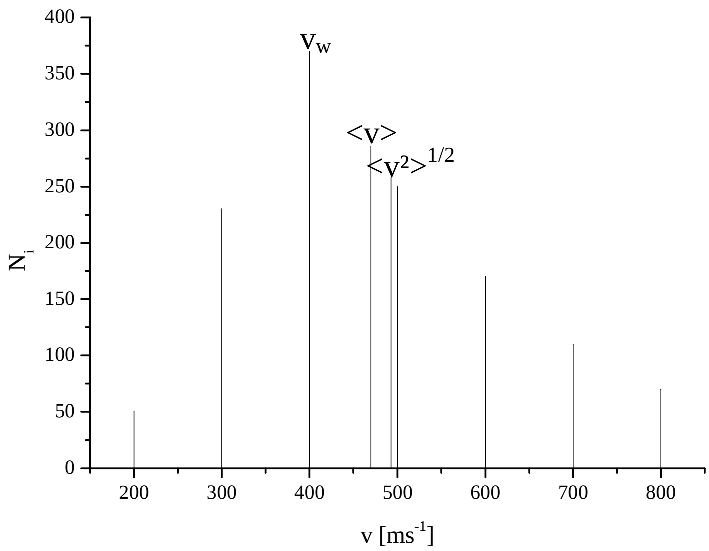
3.3 L

Wir betrachten ein Ensemble von 1250 Molekülen mit folgenden Geschwindigkeiten:

i	1	2	3	4	5	6	7
N_i	50	230	370	250	170	110	70
v [ms^{-1}]	200	300	400	500	600	700	800

Zeichnen Sie N_i als Funktion von v und bestimmen Sie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit (v_w), die mittlere Geschwindigkeit (<v>) und die Wurzel des mittleren Geschwindigkeitsquadrates ($\sqrt{\langle v^2 \rangle}$) für das Gas.

Lösung:



Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit findet sich am Maximum der Verteilungskurve: $v_w = 400\ ms^{-1}$

Der Mittelwert einer Verteilung berechnet sich folgendermaßen:

$$\langle v \rangle = \sum_i h_i v_i \quad \text{mit} \quad h_i = \frac{N_i}{N_{ges}}\ ;\ N_{ges} = 1250$$

$$\langle v \rangle = \left(\frac{50}{1250} \cdot 200 + \frac{230}{1250} \cdot 300 + \frac{370}{1250} \cdot 400 + \frac{250}{1250} \cdot 500 + \frac{170}{1250} \cdot 600 + \frac{110}{1250} \cdot 700 + \frac{70}{1250} \cdot 800 \right) ms^{-1}$$

$$\langle v \rangle = 470\, ms^{-1}$$

Analog erhalten wir für die Wurzel des mittleren Geschwindigkeitsquadrates:

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\sum_i h_i v_i^2} = \sqrt{\left(\frac{50}{1250} \cdot 200^2 + \frac{230}{1250} \cdot 300^2 + \ldots + \frac{70}{1250} \cdot 800^2 \right) m^2 s^{-2}} = 493\, ms^{-1}$$

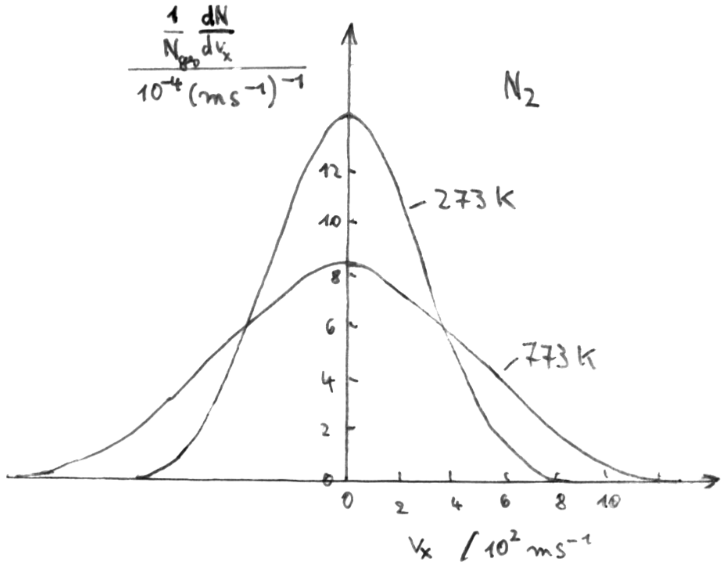
3.4 L

a) Skizzieren Sie in einem Diagramm den Verlauf der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung für Moleküle eines idealen Gases, die sich im 1-dimensionalen Raum bewegen, bei 0°C und 500°C.

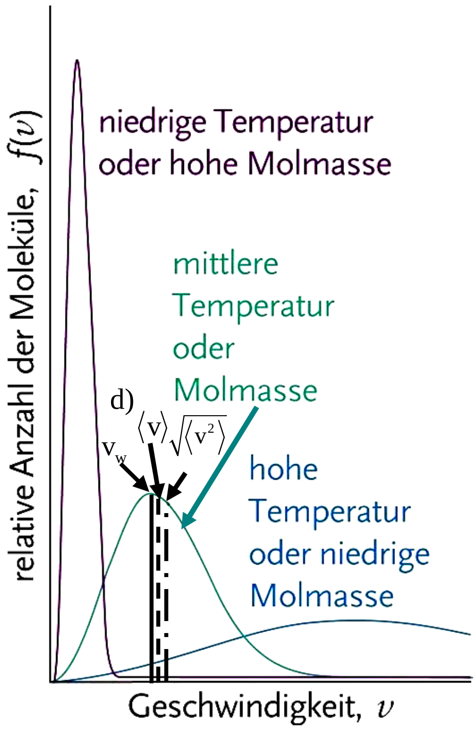
b) Skizzieren Sie in einem Diagramm den Verlauf der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeits-verteilung für Moleküle eines idealen Gases, die sich im 3-dimensionalen Raum bewegen, bei einer hohen, einer mittleren und einer niedrigen Temperatur.

c) Skizzieren Sie in einem Diagramm den Verlauf der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung für Moleküle eines idealen Gases, die sich im 3-dimensionalen Raum bewegen, bei einer hohen, einer mittleren und einer niedrigen Molmasse des Gases.
d) Zeichnen Sie in die Diagramme aus b) und c) in jeweils eine der Kurven die Lage der wahrscheinlichsten und der mittleren Geschwindigkeit sowie die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat ein.

Lösung:



a)



b) und c)

3.5 L
Wir betrachten einen Kolben mit reinem Argon bei einer Temperatur von 216,58 K und einem Druck von 10 kPa (σ = 0,36 nm^2).
a) Berechnen Sie die Zahl der Zusammenstöße pro s, die ein Ar-Atom erfährt, wenn alle anderen Atome sich nicht bewegen.
b) Berechnen Sie die Zahl der Zusammenstöße pro s, die ein Ar-Atom erfährt, wenn alle anderen Atome sich auch bewegen.
c) Berechnen Sie die Gesamtzahl der Zusammenstöße pro m^3 und s, die alle Ar-Atome mit allen anderen erfahren, wenn alle Atome sich bewegen.

Lösung:

a) Es gilt: $Z_1 = \frac{N_{Ar}}{V} \cdot \sigma \cdot \langle v \rangle$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \cdot M_{Ar}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8.314\,\cancel{J}\,\cancel{K^{-1}}\,\cancel{mol^{-1}} \cdot 216.58\,\cancel{K}}{\pi \cdot 39.948\,\cancel{g}\,\cancel{mol^{-1}}} \cdot \frac{10^3\,\cancel{g}}{\cancel{kg}} \cdot \frac{\cancel{kg}\,m^2 s^{-2}}{\cancel{J}}} = 338.8\,ms^{-1}$$

Ideales Gasgesetz: $P_{Ar} V = n_{Ar} RT$

Stoffmenge: $n_{Ar} = \frac{N_{Ar}}{N_A}$

$$Z_1 = \frac{N_A P_{Ar}}{RT} \cdot \sigma \cdot \langle v \rangle =$$

$$= \frac{6.022 \cdot 10^{23} \cancel{mol^{-1}} \cdot 10000 \cancel{Pa}}{8.314 \cancel{J} \cancel{K^{-1}} \cancel{mol^{-1}} \cdot 216.58 \cancel{K}} \cdot \frac{\cancel{N} \cancel{m^{-2}}}{\cancel{Pa}} \cdot \frac{\cancel{J}}{\cancel{N} \cancel{m}} \cdot 0.36 \cancel{nm^2} \frac{10^{-18} \cancel{m^2}}{\cancel{nm^2}} \cdot 339 \cancel{m} s^{-1} = 4.08 \cdot 10^8 s^{-1}$$

b) Es gilt: $Z_{1Ar} = \frac{N_{Ar}}{V} \cdot \sigma \cdot \langle v \rangle \cdot \sqrt{2} = Z_1 \cdot \sqrt{2} = 4.08 \cdot 10^8 s^{-1} \cdot \sqrt{2} = 5.77 \cdot 10^8 s^{-1}$

c) Es gilt:

$$Z_{ArAr} = \frac{N_{Ar}}{V} \cdot \sigma \cdot \langle v \rangle \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{N_{Ar}}{V} \cdot \frac{1}{2} = 3.34 \cdot 10^{24} \cancel{m^{-3}} \cdot 3.6 \cdot 10^{-19} \cancel{m^2} \cdot 339 \cancel{m} s^{-1} \cdot \sqrt{2} \cdot 3.34 \cdot 10^{24} m^{-3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$Z_{ArAr} = 9.65 \cdot 10^{32} m^{-3} s^{-1}$$