Ableitung des vereinfachten Ausdrucks für die Tunnel- bzw. Transmissionswahrscheinlichkeit T im Grenzfall αa >> 1

Ausgangspunkt: Gl. 7.66, Gräber-Skript S. 191

$$T = \frac{|A'|^2}{|A|^2} = \frac{\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)}{\left(1 - \frac{E}{V_0}\right) + \frac{V_0}{4E}\sinh^2(\alpha a)} =$$

Der Einfachheit halber setzen wir

$$\varepsilon = \frac{E}{V_0}$$

Damit erhalten wir

$$T = \frac{(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon) + \frac{1}{4\varepsilon}\sinh^2(\alpha a)} = \left[\frac{(1-\varepsilon) + \frac{1}{4\varepsilon}\sinh^2(\alpha a)}{(1-\varepsilon)}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{\sinh^2(\alpha a)}{4\varepsilon(1-\varepsilon)}\right]^{-1}$$

Mit der Definition des Sinus Hyperbolicus

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

ergibt sich

$$T = \left[1 + \frac{\left(e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}\right)^2}{16\varepsilon(1-\varepsilon)}\right]^{-1},$$

was Gl.9.20a, S. 329 im Buch von Atkins (4. Auflage) entspricht.

Im Grenzfall αa >> 1 kann die zweite Exponentialfunktion $e^{-\alpha a}$ vernachlässigt werden und es resultiert

$$T \approx \left[1 + \frac{\left(e^{\alpha a}\right)^2}{16\varepsilon(1-\varepsilon)}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{e^{2\alpha a}}{16\varepsilon(1-\varepsilon)}\right]^{-1}$$

Wenn αa >> 1, dann wird auch der zweite Summand in der eckigen Klammer sehr viel größer als 1 und man die 1 ebenfalls vernachlässigen.

Es folgt

$$T \approx \left[\frac{e^{2\alpha a}}{16\varepsilon(1-\varepsilon)}\right]^{-1} = \frac{16\varepsilon(1-\varepsilon)}{e^{2\alpha a}} = 16\varepsilon(1-\varepsilon)e^{-2\alpha a} ,$$

was Gl. 9.20b (Atkins) entspricht und identisch ist mit Gl. 7.67 im Gräberskript, wie das Rückeinsetzen von $\varepsilon = (E/V_0)$ zeigt:

$$T = 16\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)e^{-2\alpha a} .$$