

**Lösungen zum Übungsblatt 8
zur Vorlesung Physikalische Chemie II
WS 2007/08 Prof. P. Gräber**

Ersetzen wir r_2 , ergibt sich: $m_1 r_1 = m_2 (R - r_1)$

$$r_1 (m_1 + m_2) = m_2 R$$

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R$$

und entsprechend: $r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R$

Das Trägheitsmoment ist definiert als

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

mit r = Abstand der Masse dm von der Drehachse.

Hat man 2 punktförmige Massen im Abstand r_1 und r_2 , so ergibt sich:

$$I = r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 \quad (\text{allgemein: } I = \sum_i m_i r_i^2)$$

Wir ersetzen r_1 und r_2 durch die entsprechenden Ausdrücke für R (2.4.3.2 und 2.4.3.3) und erhalten:

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 R^2 m_1 + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 R^2 m_2 \\ &= R^2 \left\{ \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \right\} = R^2 \left\{ \frac{m_1 m_2 (m_2 + m_1)}{(m_1 + m_2)^2} \right\} \\ &= R^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Man nennt

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu \quad \text{die reduzierte Masse.}$$

Wir erhalten für das Trägheitsmoment damit

$$I = \mu R^2$$

d.h. die Rotation zweier Massen im Abstand r_1, r_2 haben wir durch die Rotation einer Masse μ im Abstand R beschrieben.

Bei der Bohr'schen Beschreibung gehen wir von einem Kräftegleichgewicht bei der Bewegung des Elektrons aus.

$$F_z + F_c = 0 \Rightarrow -F_c = F_z$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{\mu v^2}{r}$$

Der Drehimpuls ist nach Bohr „gequantelt“, d.h. ganzzahliges Vielfache von \hbar :

$$\mu v r = n \hbar$$

Um diese Bedingung in das Kräftegleichgewicht einzusetzen, formen wir diese um:

1. Dividieren durch r:

$$\mu v = \frac{n \hbar}{r}$$

2. Quadrieren:

$$\mu^2 v^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{r^2}$$

3. Dividieren durch μr :

$$\frac{\mu v^2}{r} = \frac{n^2 \hbar^2}{\mu r^3}$$

Dies setzen wir ein und erhalten:

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{n^2 \hbar^2}{\mu r^3}$$

Wir lösen nach r auf:

$$r = \frac{n^2 \hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{\mu e^2} = \frac{n^2 \hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{e^2 \frac{m_k m_e}{m_k + m_e}} = \frac{n^2 \hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 (m_k + m_e)}{e^2 m_k m_e} = \frac{n^2 \hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{e^2 m_e} \left(1 + \frac{m_e}{m_k}\right)$$

Der erste Term beschreibt den Radius, wenn die Masse des Kerns sehr schwer gegen die Masse des Elektrons ist, d. h. der Schwerpunkt im Zentrum des Kerns liegt. Der zweite Term ist der Korrekturterm, der auf Grund der Rotation um den gemeinsamen Schwerpunkt zu Stande kommt.

Für $n = 1$ nennt man den Radius den Bohr'schen Radius a_0 .

$$a_0 = \frac{1^2 \hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} = \frac{1^2 (1 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2 \cdot 4\pi 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1} \text{m}^{-1}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (1,6 \cdot 10^{-19})^2 (\text{As})^2}$$

Einheiten: $\left[\frac{\text{J}^2 \text{s}^2 \text{AsV}^{-1} \text{m}^{-1}}{\text{kg A}^2 \text{s}^2} = \frac{\text{kgm}^2 \text{s}^{-2} \text{AsV s}^2 \text{AsV}^{-1} \text{m}^{-1}}{\text{kg A}^2 \text{s}^2} = \text{m} \right]$

mit: $\text{J} = \text{kgm}^2 \text{s}^{-2} = \text{AsV}$, $\text{J}^2 = \text{kgm}^2 \text{s}^{-2} \text{AsV}$

$$a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11} = 52,9 \text{pm}$$

(alte Einheit: Ångström $\text{\AA} = 10^{-10} \text{m} = 100 \text{pm}$)

$$r = a_0 \left(1 + \frac{m_e}{m_k} \right) = 52,9 \text{pm} \left(1 + \frac{0,00055 m_u}{1,0078 m_u} \right) = 52,9 \text{pm} \cdot 1,000546 = 52,92 \text{pm}$$

Betrachtet man die Quantenzahl $n=10$, vergrößert sich der Radius um den Faktor 100.

Energie:

Die Energie des ruhenden H-Atoms setzt sich aus der kinetischen und potentiellen Energie des Elektrons zusammen:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$$

Die potentielle Energie des Elektrons berechnen wir wie folgt:

$$E_{\text{pot}} = - \int_{\infty}^r F_c \, dr , \quad F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$Q_1 = -e , \quad Q_2 = +e \quad F_c = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^r = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{\infty}^r = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Die kinetische Energie des Elektrons und des Kerns ist:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \mu v^2$$

Die Größe μv^2 können wir aus der Gleichung für das Kräftegleichgewicht entnehmen:

$$\mu v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Wir erhalten für die kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

und für die Gesamtenergie ergibt sich:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Ersetzen wir noch r mit Hilfe der vorher abgeleiteten Gleichung, ergibt sich:

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2 e^2 m_e}{n^2 \hbar^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 \left(1 + \frac{m_e}{m_k}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{e^4 m_e}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{m_e}{m_k}\right)} \cdot \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

a) Energieunterschied des H-Atoms für die erste Linie der Balmer-Serie. Diese entspricht bei Absorption dem Übergang von $n_2 = 2$ nach $n_3 = 3$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} E_3 - E_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{e^4 m_e}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{m_e}{m_k}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4\pi \cdot 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1}\text{m}^{-1}}\right)^2 \cdot \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As})^4 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{(1 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{0,0005 m_u}{1,0078 m_u}\right)} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Einheiten: } \left[\frac{(\text{As})^4 \text{ kg}}{(\text{As})^2 (\text{V}^{-1}\text{m}^{-1})^2 (\text{VAs})^2 \text{ s}^2} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = \text{J} \right]$$

$$E_3 - E_2 = 3,026 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Wenn der Kern sehr schwer gegenüber dem Elektron ist, rotiert das Elektron um den Kernschwerpunkt. Dann wird der Korrekturfaktor

$$\left(1 + \frac{m_e}{m_k}\right) \approx 1 \text{ und wir erhalten:}$$

$$E_3 - E_2 = 3,0276 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Der Energieunterschied für diesen Übergang mit und ohne Korrektur ist

$$\Delta E = (E_3 - E_2)_{\text{ohne}} - (E_3 - E_2)_{\text{mit}} = 3,0276 \cdot 10^{-19} \text{ J} - 3,026 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,6 \cdot 10^{-22} \text{ J}$$

Umrechnung in andere Einheiten:

Energieänderung für 1 mol Übergänge:

$$\Delta E(1\text{mol}) = \Delta E \cdot N_A = 1,6 \cdot 10^{-22} \text{ J} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 99,4 \text{ Jmol}^{-1}$$

Die Ladung eines Elektrons ist: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, die Energieeinheit Elektronenvolt

$$\text{ist: } 1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ AsV}, \quad 1\text{J} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV}.$$

Damit erhalten wir:

$$\Delta E = 1,6 \cdot 10^{-22} \text{ J} = \frac{1,6 \cdot 10^{-22}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 10^{-3} \text{ eV}$$

$$\Delta E = h\nu, \quad \nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1,64 \cdot 10^{-22} \text{ J}}{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1} = 2,5 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$$

Bei elektromagnetischer Strahlung bezeichnet man die Einheit s^{-1} als Hertz (Hz): $\text{s}^{-1} = \text{Hz}$

$$\Delta E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{\Delta E}{hc} = \frac{1,64 \cdot 10^{-22} \text{ J}}{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}} = 8,3 \text{ cm}^{-1}$$

Man verwendet für die Wellenzahl $\frac{1}{\lambda}$ auch das Symbol $\tilde{\nu}$.

$$\frac{1}{\lambda} = \tilde{\nu} \quad \text{Einheit: cm}^{-1}.$$

Diese Größe gibt an, wie viel Wellenlängen in 1 cm passen, d.h. die Zahl der Wellen pro cm.

8.2 Deuterium unterscheidet sich vom Wasserstoffatom nur durch seine Kernmasse. Die erste Linie der Lyman-Serie liegt für Wasserstoff H bei $82259,098 \text{ cm}^{-1}$, für Deuterium D bei $82281,476 \text{ cm}^{-1}$. Berechnen Sie aus diesen Angaben die Masse des Deuterons.

Lösung:

Die Rydbergkonstante bei unendlichem schwerem Kern ist:

$$R_{\infty} = \frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^3 c}$$

Wenn wir berücksichtigen, dass Elektron und Kern um einen gemeinsamen Schwerpunkt kreisen, muss man die Masse m_e des Elektrons durch die reduzierte Masse ersetzen:

$$\mu_H = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$$

Dann lautet die Rydbergkonstante fürs H-Atom:

$$R_H = R_\infty \frac{\mu_H}{m_e} = R_\infty \frac{m_e \cdot m_p}{m_e(m_e + m_p)} = R_\infty \frac{m_p}{m_e + m_p} = R_\infty \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}}$$

$$R_D = R_\infty \frac{\mu_D}{m_e} = R_\infty \frac{m_D}{m_e + m_D} = R_\infty \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_D}}$$

Die Wellenzahl einer Spektrallinie beim Übergang n_2 nach n_1 ist gegeben durch:

$$\tilde{\nu} = R \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right)$$

Für das Verhältnis der Wellenzahlen des gleichen Übergangs n_2 nach n_1 für H und D erhalten wir also:

$$\frac{\tilde{\nu}_H}{\tilde{\nu}_D} = \frac{R_H}{R_D} = \frac{R_\infty \left(1 + \frac{m_e}{m_p} \right)^{-1}}{R_\infty \left(1 + \frac{m_e}{m_D} \right)^{-1}} = \frac{1 + \frac{m_e}{m_D}}{1 + \frac{m_e}{m_p}}$$

Auflösen nach m_D ergibt:

$$m_D = m_e \left(\frac{\tilde{\nu}_H}{\tilde{\nu}_D} \left(1 + \frac{m_e}{m_p} \right) - 1 \right)^{-1}$$

$$m_D = 0,00055 m_u \left(\frac{82259,098 \text{ cm}^{-1}}{82281,476 \text{ cm}^{-1}} \left(1 + \frac{0,00055 m_u}{1,0073 m_u} \right) - 1 \right)^{-1}$$

$$m_D = 0,00055 m_u \cdot \left(0,999728 \cdot (1 + 5,46 \cdot 10^{-4}) - 1 \right)^{-1}$$

$$m_D = 2,00828 m_u = 2,00828 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 3,33 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

- 8.3 Berechnen Sie die Geschwindigkeit eines Elektrons im Grundzustand eines Wasserstoffatoms nach dem Bohr'schen Atommodell. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Elektrons in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit? Wie lange braucht das Elektron, um genau einmal den Kern zu umkreisen? Wie viel mal pro Sekunde umkreist das Elektron den Kern? Berechnen Sie die De Broglie Wellenlänge für das Elektron im Grundzustand des H-Atoms und zeigen Sie, dass diese Wellenlänge dem Umfang der Kreisbahn entspricht, auf der es sich bewegt.

$$(a_0 = 5,295 \cdot 10^{-11} \text{ m}), (m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})$$

Lösung:

- a) Bohr'sches Postulat

$$mvr = n\hbar$$

$$v = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{1 \cdot 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2\pi \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}} = 2,19 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}$$

- b) v relativ zur Lichtgeschwindigkeit:

$$\frac{v}{c} = \frac{2,19 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}}{3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}} = 7,29 \cdot 10^{-3}$$

- c) Dauer einer Umlaufzeit:

$$v = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{dx}{dt}$$

Der Weg dx ist der Umfang des Kreises mit Radius r, $dx = 2\pi r$, die Zahl dt ist die Dauer der Umlaufzeit:

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 5,295 \cdot 10^{-11} \text{ m}}{2,19 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}} = 1,52 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

- d) Zahl der Umlaufzeiten pro Sekunde (Frequenz):

$$\nu = \frac{1}{dt} = \frac{1}{1,52 \cdot 10^{-16} \text{ s}} = 6,58 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

- e) De-Broglie-Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 2,19 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}} = 3,33 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

- f) Verhältnis Kreisbahn zu de-Broglie-Wellenlänge:

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}}{3,3 \cdot 10^{-10} \text{ m}} = 1,0.$$

- 8.4 Ein Taucher dringt in der Tiefe in eine dunkle Welt vor. Der mittlere molare Absorptionskoeffizient des Seewassers liegt im Sichtbaren bei

$\varepsilon = 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ M}^{-1} \text{ cm}^{-1}$; in welcher Tiefe wird ein Taucher

- a) die Hälfte der Intensität an der Oberfläche,
- b) ein Zehntel davon antreffen?

Lösung:

Der Absorptionskoeffizient ist in den Einheiten $\text{M}^{-1}\text{cm}^{-1}$ gegeben. Wir berechnen zunächst die Konzentration des Wassers in der Einheit molL^{-1} .

Das Volumen $V = 1\text{L}$ enthält die Masse $m = 1\text{kg}$, die Molmasse des Wassers ist $M = 18\text{gmol}^{-1}$. Damit erhalten wir:

$$c = \frac{n}{V} = \frac{m}{MV} = \frac{1\text{kg}}{18 \cdot 10^{-3}\text{kgmol}^{-1} \cdot 1\text{L}} = 55\text{molL}^{-1}.$$

Wir verwenden das Lambert-Beer'sche Gesetz:

$$I = I_0 \cdot 10^{-\varepsilon c \ell}, \quad \lg \frac{I}{I_0} = -\varepsilon c \ell$$

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{1}{-\varepsilon c} \lg \frac{I}{I_0} = \frac{1}{\varepsilon c} \lg \frac{I_0}{I} \\ &= \frac{1}{6,2 \cdot 10^{-5}\text{M}^{-1}\text{cm}^{-1} \cdot 55,5\text{M}} \lg \frac{I_0}{I} \\ &= 290\text{cm} \cdot \lg \frac{I_0}{I} \end{aligned}$$

$$\text{a) } I = 0,5I_0, \quad \lg \frac{I_0}{I} = \lg \frac{I_0}{0,5I_0} = \lg 2$$

$$\ell = 290\text{cm} \cdot \lg 2 = 88\text{cm}$$

$$\text{b) } I = 0,1I_0, \quad \lg \frac{I_0}{I} = \lg \frac{I_0}{0,1I_0} = \lg 10$$

$$\ell = 290\text{cm} \cdot \lg 10 = 290\text{cm}.$$

8.5 Bei der Lichtabsorption von Brom in CCl_4 wurden in einer 2,0 mm-Zelle für die Transmission die folgenden Werte gemessen:

$[\text{Br}_2]/\text{M}$	0,001	0,005	0,010	0,050
Transmission/%	81,4	35,6	12,7	$3,0 \cdot 10^{-3}$

Wie groß ist der molare Absorptionskoeffizient ε des Broms bei der betreffenden Wellenlänge?

Lösung:

Die Transmission ist folgendermaßen definiert:

$$T = \frac{I}{I_0}$$

Das Lambert-Beer'sche Gesetz verwendet die Absorbanz:

$$A = \lg \frac{I_0}{I} = \varepsilon c \ell$$

Setzen wir die Definition der Transmission ein, so erhalten wir:

$$\lg T = -\varepsilon c \ell.$$

Wir lösen nach dem Absorptionskoeffizienten ε auf:

$$\varepsilon = -\frac{\lg T}{c \ell} = \frac{-\lg 0,814}{0,001 \text{ mol L}^{-1} \cdot 0,2 \text{ cm}} = 447 \text{ M}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

Wir verwenden die Daten der Tabelle.

[Br ₂]/M	0,001	0,005	0,010	0,050
T	0,814	0,356	0,127	$3 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon / \text{M}^{-1} \text{ cm}^{-1}$	447	449	448	452

$$\text{Mittelwert } \bar{\varepsilon} = \frac{\sum \varepsilon_i}{N_i} = \frac{447 + 449 + 448 + 452}{4} = 449 \text{ M}^{-1} \text{ cm}^{-1}.$$

8.6 Ein Lichtstrahl von $3 \cdot 10^{10}$ Photonen pro s und einer Wellenlänge von 400 nm durchdringt 3,5 mm einer Lösung, die eine absorbierende Substanz in der Konzentration $6,75 \cdot 10^{-4}$ M enthält. Dabei wird eine Transmission von 65,5 % gemessen.

Wie groß ist der molare dekadische Absorptionskoeffizient ε der Substanz bei dieser Wellenlänge in $\text{cm}^2 \text{ mol}^{-1}$? Berechnen Sie die Zahl der pro Sekunde absorbierten Photonen.

Lösung:

Transmission: $T = \frac{I}{I_0}$

Lambert-Beer: $A = \lg \frac{I_0}{I} = \varepsilon c \ell = -\lg T$

$$\varepsilon = -\frac{\lg T}{c \ell} = \frac{-\lg 0,655}{6,75 \cdot 10^{-4} \text{ M} \cdot 0,35 \text{ cm}} = 777,8 \text{ M}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

Einheiten:

$$\left[\text{M}^{-1} \text{ cm}^{-1} = \frac{1}{\text{mol L}^{-1} \text{ cm}} = \frac{\text{L}}{\text{mol cm}} = \frac{10^3 \text{ cm}^3}{\text{mol cm}} = 10^3 \text{ cm}^2 \text{ mol}^{-1} \right]$$

$$\varepsilon = 7,778 \cdot 10^5 \text{ cm}^2 \text{ mol}^{-1}.$$

Für gebündelte Lichtstrahlen, wie sie in der Optik und Spektroskopie verwendet werden, gibt man üblicherweise die Intensität der Strahlung an.

$$\text{Intensität} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}, \quad I = \frac{dQ}{F dt}.$$

In Spektrometern gibt man die spektrale Intensität I_λ sowie die Breite $d\lambda$ der Wellenlängenverteilung an.

Verwendet man das Photonenbild zur Beschreibung der Strahlung, so gibt man die Zahl der Photonen und deren Energie an, d.h.:

$$Q = \sum N_i \varepsilon_i \quad \text{wobei } N_i \text{ die Zahl der Photonen mit der Energie } \varepsilon_i \text{ ist.}$$

Wenn es sich um eine monochromatische Strahlung handelt, haben alle Photonen die gleiche Energie und wir erhalten:

$$dQ = \varepsilon_i dN \quad \text{und} \quad I = \frac{\varepsilon_i dN}{F dt}$$

Die Zahl der absorbierten Photonen berechnet sich wie folgt:

$$\frac{dN}{dt}(\text{abs}) = \frac{dN}{dt}(\text{ein}) - \frac{dN}{dt}(\text{aus})$$

$$I(\text{abs}) = I_0 - I(\text{aus}).$$

Die Energie der austretenden Strahlung berechnen wir nach dem Lambert-Beer'schen Gesetz.

$$I(\text{aus}) = I_0 \cdot 10^{-\varepsilon c \ell}$$

Damit ergibt sich für $I(\text{abs})$

$$\begin{aligned}
 I(\text{abs}) &= I_0(1 - 10^{-\varepsilon c \ell}) \quad \left| \cdot \frac{F}{\varepsilon_i} \right. \\
 \frac{dN}{dt}(\text{abs}) &= \left(\frac{dN}{dt} \right)_0 (1 - 10^{-\varepsilon c \ell}) \\
 &= 3 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} (1 - 10^{-777,8 \text{ M}^{-1} \text{ cm}^{-1} \cdot 6,74 \cdot 10^{-4} \text{ M} \cdot 0,35 \text{ cm}}) \\
 &= 1,03 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}.
 \end{aligned}$$

Da wir die Energie eines Photons kennen, können wir auch die pro Zeit absorbierte Energie ausrechnen, die letztlich zu einer Erwärmung der absorbierenden Lösung führt.

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ(\text{abs})}{dt} &= \frac{dN}{dt}(\text{abs}) \cdot \varepsilon_i = \frac{dN}{dt}(\text{abs}) \cdot h \nu = \frac{dN}{dt}(\text{abs}) \cdot \frac{hc}{\lambda} \\
 &= \frac{1,03 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \cdot 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{400 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \\
 &= 5,1 \cdot 10^{-9} \text{ Js}^{-1}
 \end{aligned}$$

Bestrahlen wir die Küvette 1 Stunde lang, so ist die absorbierte Energie:

$$\Delta E = 5,1 \cdot 10^{-9} \text{ Js}^{-1} \cdot 3600 \text{ s} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ J}.$$

Enthält die Küvette 1mL (= 1g) Wasser, so erwärmt sie sich folgendermaßen:

$$(c_p(\text{H}_2\text{O}) = 4,19 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1}):$$

$$\Delta H = C_p \Delta T = Q$$

$$\Delta T = \frac{Q}{C_p} = \frac{Q}{c_p m} = \frac{1,8 \cdot 10^{-5} \text{ J}}{4,19 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1} \text{ g}} = 4,3 \cdot 10^{-6} \text{ K}$$

Wie sieht die Erwärmung aus, wenn Licht mit einer Intensität von 600 W m^{-2} auf die Erdoberfläche fällt?

- In einer Schicht von 3 m Wasser werden 90 % der einfallenden Intensität absorbiert ($c_p(\text{H}_2\text{O}) = 4,19 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1}$)
- Auf Sand bzw. Steinen wird in einer Schicht von 1 mm 90 % der Strahlung absorbiert $c_p(\text{SiO}_2) = 0,74 \text{ J K}^{-1} \text{ g}^{-1}$